

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کامل تشریحی

ریاضی (دهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتشارات
گنگو

مجموعه کتاب‌های پایه دهم نشر الگو :

- هندسه دهم (تست و سمعدی)
- ریاضی دهم (تست و سمعدی)
- فیزیک دهم (تست و سمعدی)
- جمع‌بندی شیمی دهم
- شیمی دهم (تست)
- هندسه دهم (تمام)
- ریاضی دهم (تمام)
- فیزیک دهم (تمام)
- فارسی دهم
- جامع زیست‌شناسی دهم



- درس‌نامه‌هایی شامل نکات کلیدی و مرور مطالب مهم
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس درس‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۴۸۰ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۲۴۵۴ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سوالات کنکور سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همه پرسش‌های چهارگزینه‌ای

شما می‌توانید سوالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با

انتشارات در میان بگذارید.

https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشته ریاضی)

https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

(رشته تجربی)

انتشارات
نشر الگو

www.olgoobooks.ir



پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی ریاضی پایه دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هر جا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری پیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، سوالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، دو آزمون جامع

از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مریم موحدی‌مهر (ویراست اول) و عاطفه ربیعی (ویراست اول و دوم)، دکترین آریس آقانیانس (ویراست‌های دوم و سوم) و ابوالفضل علی‌بمانی (ویراست سوم) برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حرفه‌چینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های منتهی و نامتناهی

- بخش اول، یادآوری مجموعه‌ها ۲
- بخش دوم، مجموعه‌های مهم اعداد و بازه‌ها ۵
- بخش سوم، مجموعه‌های منتهی و نامتناهی ۱۵
- سؤالات کنکور سراسری ۱۸

درس دوم: متمم یک مجموعه

- بخش اول، مجموعه مرجع متمم یک مجموعه ۱۹
- بخش دوم، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ۲۴
- سؤالات کنکور سراسری ۳۰

درس سوم: الگو و دنباله

- بخش اول، الگو ۳۱
- بخش دوم، دنباله ۴۰
- سؤالات کنکور سراسری ۴۵

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

- بخش اول، دنباله حسابی ۴۶
- بخش دوم، دنباله هندسی ۵۶
- سؤالات کنکور سراسری ۶۵

آزمون‌های فصل ۶۷

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

- بخش اول، نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۷۰
- بخش دوم، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف ۸۰
- بخش سوم، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم ۸۵
- بخش چهارم، مساحت ۸۷
- سؤالات کنکور سراسری ۸۹

درس دوم: دایره مثلثاتی

- بخش اول، زاویه مثلثاتی و دایره مثلثاتی ۹۰
- بخش دوم، نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی ۹۳
- بخش سوم، محور سینوس و محور کسینوس ۹۹
- بخش چهارم، رابطه شیب خط با تانژانت زاویه ۱۰۶

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

- بخش اول، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۰۹
- بخش دوم، اتحادهای مثلثاتی ۱۱۵
- بخش سوم، محاسبات به کمک اتحادهای مثلثاتی ۱۲۰
- سؤالات کنکور سراسری ۱۲۶

آزمون‌های فصل ۱۲۷



◆ فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

- بخش اول، حل معادله درجه دوم ۲۰۴
- بخش دوم، بحث در تعداد جواب‌های معادله درجه دوم، ۲۱۲
- بخش سوم، معادله درجه دوم در مسائل دیگر ۲۱۵
- سوالات کنکور سراسری ۲۱۸

درس دوم: سهمی

- سوالات کنکور سراسری ۲۱۹
- سوالات کنکور سراسری ۲۲۳

درس سوم: تعیین علامت

- بخش اول، تعیین علامت ۲۳۴
- بخش دوم، نامعادله ۲۴۴
- بخش سوم، معادله‌ها و نامعادله‌های قدرمطلق ۲۵۲
- سوالات کنکور سراسری ۲۶۱

آزمون‌های فصل

- ۲۶۳

◆ فصل پنجم: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

- سوالات کنکور سراسری ۲۶۶
- ۲۷۰

درس دوم: دامنه و برد توابع

- بخش اول، دامنه، برد و ضابطه تابع ۲۷۱
- بخش دوم، تابع خطی ۲۸۲

درس سوم: انواع تابع

- بخش اول، توابع معروف ۲۸۷
- بخش دوم، مدل‌سازی با توابع ۲۹۵

◆ فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

- بخش اول، ریشه ۱۳۰
- بخش دوم، مقایسه ریشه‌ها ۱۳۷

درس دوم: ریشه n ام

- بخش اول، ریشه n ام ۱۳۹
- بخش دوم، مقایسه ریشه‌ها ۱۴۴
- سوالات کنکور سراسری ۱۴۵

درس سوم: توان‌های گویا

- بخش اول، توان‌های گویا ۱۴۶
- بخش دوم، مقایسه توان‌ها ۱۵۳
- سوالات کنکور سراسری ۱۵۵

درس چهارم: عبارت‌های جبری

- بخش اول، اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله ۱۵۶
- بخش دوم، اتحاد مزدوج ۱۶۲
- بخش سوم، اتحاد مربع مجموع سه جمله ۱۶۷
- بخش چهارم، اتحاد جمله مشترک ۱۶۹
- بخش پنجم، اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله ۱۷۱
- بخش ششم، اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌های دو جمله (باقی‌لاغر) ۱۷۷
- بخش هفتم، تجزیه ۱۸۱
- بخش هشتم، ساده کردن عبارت‌ها ۱۸۸
- بخش نهم، گویا کردن مخرج‌های گنگ ۱۹۴
- سوالات کنکور سراسری ۲۰۰

آزمون‌های فصل

- ۲۰۱



◆ **فصل هشتم: آمار و احتمال** ◆

درس اول: احتمال با اندازه‌گیری شانس

بخش اول: مفهوم احتمال ۳۶۰

بخش دوم: ویژگی‌های احتمال ۳۷۱

سؤالات کنکور سراسری ۳۷۵

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۳۷۷

درس سوم: متغیر و انواع آن ۳۷۹

آزمون‌های فصل ۳۸۱

◆ **فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی** ◆

پاسخ‌های تشریحی ۳۸۴

◆ **فصل نهم: پاسخنامه کلیدی** ◆

پاسخنامه کلیدی ۵۸۶

بخش سوم: تابع چندضابطه‌ای و تابع قدرمطلق ۳۹۹

بخش چهارم: رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال ۳۰۸

سؤالات کنکور سراسری ۳۱۶

آزمون‌های فصل ۳۱۷

◆ **فصل ششم: شمارش، بدون شماردن** ◆

درس اول: شمارش ۳۲۰

سؤالات کنکور سراسری ۳۳۰

درس دوم: جایگشت

بخش اول: جایگشت خطی ۳۳۱

بخش دوم: جایگشت I شیء n لا II شیء n ۳۳۷

سؤالات کنکور سراسری ۳۴۰

درس سوم: ترکیب ۳۴۱

سؤالات کنکور سراسری ۳۵۶

آزمون‌های فصل ۳۵۷

فصل سوم

درس اول / بخش اول: ریشه

ریشه دوم

- اگر a عددی حقیقی و مثبت باشد، عددهای \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ را **ریشه‌های دوم** عدد a می‌نامیم.
- عدد صفر فقط یک ریشه دوم دارد که همان صفر است: $\sqrt{0}=0$.
- عددهای حقیقی منفی ریشه دوم ندارند.

مثال: ریشه‌های دوم عدد ۹ عددهای $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ هستند، که به ترتیب برابر ۳ و -3 هستند.

تست

۱ اختلاف ریشه‌های دوم عدد a برابر ۶ است. مقدار a کدام است؟

۳۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

$$\sqrt{a} - (-\sqrt{a}) = 6 \Rightarrow 2\sqrt{a} = 6 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

ریشه‌های دوم عدد a برابر \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ هستند. بنا بر فرض

راه‌حل

ویژگی‌های ریشه دوم

اگر a و b عددهایی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

تست

۲ اختلاف ریشه‌های دوم عدد $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

$2\sqrt{12}$ (۴)

$2\sqrt{8}$ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{5}$ (۱)

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$$

ابتدا توجه کنید که

راه‌حل

بنابراین ریشه‌های دوم عدد مورد نظر $\sqrt{6}$ و $-\sqrt{6}$ هستند، که اختلاف آن‌ها برابر است با $\sqrt{6} - (-\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$.

نکته

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و b نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}, \quad a > 0 \Rightarrow a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \quad a < 0 \Rightarrow a \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$$

مثال:

الف) $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

ب) $\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \times 7} = |3| \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

ب) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{20}$

ت) $-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \times 3} = -\sqrt{48}$

تست

۳ اگر $a < b$ ، حاصل $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ کدام است؟

صفر (۴)

$2a - 2b$ (۳)

$2a$ (۲)

$2b$ (۱)

چون a منفی و b مثبت است، پس $a - b$ منفی است. بنابراین

راه‌حل

$$\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = |a-b| - |a| - |b| = -(a-b) - (-a) - b = -a + b + a - b = 0$$



ریشه سوم

ریشه سوم عدد حقیقی a عددی است که مکعب آن برابر a است و آن را با $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم.

مثال: ریشه سوم عدد ۸ عدد $\sqrt[3]{8}$ است که برابر ۲ است.

تست ۴

مقدار $\sqrt[3]{-5-\sqrt{12+\sqrt{-27}}}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

توجه کنید که $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ بنابراین

$$\sqrt[3]{-5-\sqrt{12+\sqrt{-27}}} = \sqrt[3]{-5-\sqrt{12-3}} = \sqrt[3]{-5-\sqrt{9}} = \sqrt[3]{-5-3} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

راحل

تست ۵

مقدار $\sqrt[3]{-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{216}{1000}}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{5}{10}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

توجه کنید که $\sqrt[3]{-\frac{5}{10}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{5}{10}\right)^3} = -\frac{5}{10}$ و $\sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{6}{10}\right)^3} = \frac{6}{10}$ بنابراین عدد مورد نظر برابر است با

$$-\frac{5}{10} - \frac{6}{10} = -\frac{11}{10} = -\frac{5}{2}$$

راحل

ویژگی‌های ریشه سوم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} - a, \quad \sqrt[3]{ax}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \quad \sqrt[3]{a^3}b = a\sqrt[3]{b}$$

مثال:

الف) $\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4$

ب) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8 \times 9} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

ب) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

تست ۶

اگر $a < 0$ ، حاصل $\frac{a}{\sqrt[3]{a^3}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۱

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{a}{a} = \frac{|a|}{a} = \frac{-a}{a} = -1 = -1 - (-1) = 2$$

می‌توان نوشت

راحل

تست ۷

اگر $\sqrt[3]{\sqrt{a+5}} = 2$ ، مقدار $\sqrt[3]{4\sqrt{a-5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

توجه کنید که $a - 4^3 = 64 \rightarrow a - 64 = 64 \rightarrow a = 128$ توان سه $\rightarrow \sqrt{a+5} = 3^2 - 9 \rightarrow \sqrt{a+5} = 3^2 - 9$ توان دو $\rightarrow \sqrt[3]{4\sqrt{a-5}} = 3$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{a-5}} = \sqrt[3]{4\sqrt{64-5}} = \sqrt[3]{4 \times 8} = \sqrt[3]{32} = 3$$

توجه کنید که

بنابراین

راحل



ریشه چهارم

ریشه‌های چهارم عدد حقیقی و نامنفی a عددهایی هستند که توان چهارم آن‌ها برابر a است.

مثال: چون $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$ پس ۲ و -۲ ریشه‌های چهارم ۱۶ هستند.

نکته

- عدد حقیقی و مثبت a دو ریشه چهارم قرینه هم دارد، که ریشه چهارم مثبت را با $\sqrt[4]{a}$ و ریشه چهارم منفی را با $-\sqrt[4]{a}$ نشان می‌دهیم.
- عدد صفر فقط یک ریشه چهارم دارد که همان صفر است: $\sqrt[4]{0} = 0$.
- عددهای حقیقی منفی ریشه چهارم ندارند.

مثال: عدد ۸۱ دو ریشه چهارم دارد که برابر $\sqrt[4]{81}$ و $-\sqrt[4]{81}$ هستند. مقادیر این دو ریشه به ترتیب برابر ۳ و -۳ است.

ویژگی‌های ریشه چهارم

اگر a و b عددهایی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[4]{a^f} = a, \quad \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}, \quad \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

تست ۸

حاصل $\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{3/2} + \sqrt[4]{51/2})$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

توجه کنید که $3/2 = \frac{16}{5}$ و $51/2 = \frac{256}{5}$ بنابراین

$$\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{3/2} + \sqrt[4]{51/2}) = \sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{\frac{16}{5}} + \sqrt[4]{\frac{256}{5}}) = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{\frac{16}{5}} + \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{\frac{256}{5}} = \sqrt[4]{5 \times \frac{16}{5}} + \sqrt[4]{5 \times \frac{256}{5}} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{256} = 2 + 4 = 6$$

را بچل

نکته

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و b نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[4]{a^f} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^f b} = |a|b, \quad a > 0 \Rightarrow a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^f b}, \quad a < 0 \Rightarrow a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^f b}$$

تست ۹

اگر $x > 0$ حاصل $3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^3}$ کدام است؟

$5x$ (۴)

$-x$ (۳)

x (۲)

$3x$ (۱)

چون $x > 0$ پس $\sqrt[4]{x^3} = |x| = x$ در نتیجه

$$3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^3} = 3x + 2x = 5x$$

را بچل

تست ۱۰

حاصل عبارت $\sqrt{-a} + \frac{\sqrt{a^3+ra}}{\sqrt{a^3-ra}}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

$\sqrt{-a}-1$ (۴)

$\sqrt{-a}+3$ (۳)

$\sqrt{-a}+1$ (۲)

$\sqrt{-a}+\frac{1}{3}$ (۱)

با توجه به وجود $\sqrt{-a}$ در عبارت، واضح است که a مثبت نیست. بنابراین $\sqrt{a^3} = a$ و $\sqrt{a^3} = -a$ و در نتیجه

$$\sqrt{-a} + \frac{\sqrt{a^3+ra}}{\sqrt{a^3-ra}} = \sqrt{-a} + \frac{a+ra}{-a-ra} = \sqrt{-a} - 1$$

را بچل



سخت ۱۱

حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}}$ کدام است؟

- (۴) $\sqrt{5+1}$
- (۳) $\sqrt{4+1}$
- (۲) $\sqrt{5-1}$
- (۱) $\sqrt{4-1}$

راهنما توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}} = \frac{\sqrt{5 \times 4} - \sqrt{5} + \sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{4} - \sqrt{5} + \sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{4}-1) + \sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}} = \frac{(\sqrt{4}-1)(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{4-1}} = \sqrt{5+1}$$

ریشه بنجم

ریشه بنجم عدد حقیقی a عددی است که توان بنجم آن برابر a است و آن را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.

مثال: چون $2^5 = 32$ پس $\sqrt[5]{32} = 2$.

ویژگی‌های ریشه بنجم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m} = a, \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \quad \sqrt[n]{a^m b} = a \sqrt[n]{b}$$

سخت ۱۲

ریشه بنجم عدد a برابر ۱۶ است. ریشه چهارم این عدد کدام است؟

- (۴) ۱۲۸
- (۳) ۶۴
- (۲) ۳۲
- (۱) ۲۰

راهنما توجه کنید که

$$\sqrt[4]{a} = 16 \Rightarrow a = 16^4 = (2^4)^4 = (2^4)^4$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{(2^4)^4} = 2^4 = 16$$

سخت ۱۳

اگر $a = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8}$ و $b = \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16}$ مقدار $(\frac{b}{a})^5$ کدام است؟

- (۴) $4\sqrt{2}$
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۲) ۴
- (۱) ۲

راهنما توجه کنید که

$$b = \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} = \sqrt{2 \times 2} + \sqrt{2 \times 4} + \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{4} + \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8}) = \sqrt{2} \times a$$

$$(\frac{b}{a})^5 = (\sqrt{2})^5 = 2 \sqrt{2} \quad \text{پس} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{2}$$



ریشه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



سطح ۱

کتاب درسی

۸۳۲- مقدار $\frac{2}{100} \sqrt[3]{(0.0016)^{-1}}$ کدام است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۳ (۴) ۰/۴

کتاب درسی

۸۳۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{-18} + \sqrt{-98})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

کتاب درسی

۸۳۴- حاصل $\frac{\sqrt{-125} + \sqrt{-206}}{\sqrt[3]{0.00001}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۸۳۵- حاصل $\frac{\sqrt{0.0004} + \sqrt{0.0008}}{\sqrt[3]{0.0016} - \sqrt[3]{0.00001}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{4}{1}$ (۴) $\frac{4}{2}$

۸۳۶- حاصل $\sqrt[3]{0.00032} \times \sqrt{(0.0016)^{-1}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۵

کتاب درسی

۸۳۷- حاصل $\frac{1}{\sqrt{(-27)^{-2}}} - \frac{1}{\sqrt{(-32)^{-5}}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{10}$ (۳) $-\frac{1}{15}$ (۴) $-\frac{1}{20}$

۸۳۸- مقدار $\sqrt[3]{8} \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۸۳۹- مقدار $\sqrt{6} \sqrt[3]{72} \sqrt[3]{27} \sqrt{9}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

کتاب درسی

۸۴۰- مقدار عبارت $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{-64} + \sqrt{5^2} - \sqrt[3]{-32}$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) ۶

کتاب درسی

۸۴۱- حاصل $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۴) صفر

کتاب درسی

۸۴۲- حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}-1$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{5}-1$

۸۴۳- اگر $x = 2 - \sqrt{7}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{(-x)^0} - \sqrt[3]{(-x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-3x$ (۲) $-x$ (۳) $3x$ (۴) $-2x$

۸۴۴- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{a^0} + \sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2}}$ کدام است؟

- (۱) $-2a$ (۲) -2 (۳) صفر (۴) $2a$



- ۸۴۵- اگر $a < 0$ ، عبارت $\sqrt{-a}\sqrt{(-a)^2}\sqrt{a^2}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sqrt{-a}$ (۲) $-a$ (۳) $-a^2$ (۴) \sqrt{a}
- ۸۴۶- اگر $a, b < 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt{(a+b)^7}}{\sqrt[3]{(a+b)^6}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $-\sqrt{-a-b}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{-a-b}}$ (۴) -1
- ۸۴۷- اگر $0 < a < -b$ ، حاصل عبارت $\sqrt{-a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{(a+b)^2}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) $a+b$ (۳) $-a-b$ (۴) $-2a$
- ۸۴۸- اگر $a \leq 1$ ، $\sqrt{(1-a)^2}$ برابر کدام است؟
 (۱) $(a-1)\sqrt{a-1}$ (۲) $(1-a)\sqrt{1-a}$ (۳) $(a-1)\sqrt{1-a}$ (۴) $(1-a)\sqrt{a-1}$
- ۸۴۹- حاصل $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[3]{72}$ (۲) $\sqrt[3]{48}$ (۳) $\sqrt[3]{54}$ (۴) $\sqrt[3]{12}$
- ۸۵۰- حاصل $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{1024}$ کدام است؟
 (۱) $-\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $2\sqrt[3]{2}$ (۴) $-2\sqrt[3]{2}$
- ۸۵۱- اختلاف ریشه‌های چهارم عدد a برابر $\sqrt[4]{2}$ است. ریشه سوم $\frac{a}{2}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$



- ۸۵۲- اگر $x < 0$ ، عبارت $\sqrt{-x^9}$ با کدام عبارت برابر است؟
 (۱) $-x^2\sqrt{x}$ (۲) $x^2\sqrt{x}$ (۳) $-x^2\sqrt{-x}$ (۴) $x^2\sqrt{-x}$
- ۸۵۳- اگر $x < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x^6} + \sqrt{x^9} + \sqrt{x^{12}}$ کدام است؟
 (۱) $2x^2$ (۲) x^2 (۳) $-x^2$ (۴) $-2x^2$
- ۸۵۴- اگر $(\frac{x}{x})^2 = 0.64$ ، حاصل $\sqrt{6x-3}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۸۵۵- اگر ریشه دوم مثبت عدد $x - \sqrt{x}$ برابر ۳ باشد، حاصل عبارت $\frac{9 + \sqrt{x}}{x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۸۵۶- اگر $\sqrt{0.000027} = a$ ، مقدار $\sqrt{3}$ بر حسب a کدام است؟
 (۱) $10a$ (۲) $10\sqrt{a}$ (۳) $9\sqrt{a}$ (۴) $\frac{a}{10}$
- ۸۵۷- اگر $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = a$ ، مقدار $\sqrt{12}$ بر حسب a کدام است؟
 (۱) $8a$ (۲) $6a$ (۳) $4a$ (۴) $2a$
- ۸۵۸- حاصل عبارت $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2-2\sqrt{2}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$
- ۸۵۹- اگر $\frac{(\sqrt{-x})^6 - 2\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2}}{x^2} = 10$ ، مقدار x کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) -5



- ۸۶۰- اگر $-1 < x < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+\sqrt{x^2}} \times \sqrt{|x-1|}$ کدام است؟
 (۱) $1-x^2$ (۲) $1-x$ (۳) $x+1$ (۴) $-x$
- ۸۶۱- اگر $x < y$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{x^2 y^2} + \sqrt{16x^2 y^2} - \sqrt{(xy-1)^2}$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) -1 (۳) $3xy$ (۴) $-3xy$
- ۸۶۲- اگر $a < b$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^2 b^2} - \sqrt[3]{(-a)^2 b^2} + b\sqrt{a^2} + a\sqrt[3]{(-b)^2}$ کدام است؟
 (۱) $2ab$ (۲) ab (۳) $3ab$ (۴) $4ab$
- ۸۶۳- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{-3a^2} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟
 (۱) $a\sqrt[3]{3a}$ (۲) $a(2-\sqrt[3]{3a})$ (۳) $-a\sqrt{-3a}$ (۴) $a\sqrt{-3a}$
- ۸۶۴- اگر $x < y$ ، حاصل عبارت $A = |x|\sqrt{y^2} + y\sqrt{x^2} + |xy| - \sqrt{x^2 y^2}$ کدام است؟
 (۱) $-xy$ (۲) x (۳) $-2xy$ (۴) 0
- ۸۶۵- هرگاه $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{a^2 - 7a + 16} + \sqrt{a^2}$ کدام است؟
 (۱) $-a$ (۲) $4-a$ (۳) $a-4$ (۴) a^2
- ۸۶۶- اگر $a^4 = 16$ و $b^2 = -54$ ، مقدار $\frac{a^2 + b}{a^2 - b}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{1}{7}$ (۴) $-\frac{1}{9}$
- ۸۶۷- حاصل عبارت $(xy^2 - 1)(x^2 y + xy + 1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ و $y = \sqrt[3]{4}$ کدام است؟
 (۱) 54 (۲) 63 (۳) 49 (۴) 7
- ۸۶۸- حاصل $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟
 (۱) 4 (۲) 8 (۳) 2 (۴) 0
- ۸۶۹- حاصل $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{8}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}})^6$ کدام است؟
 (۱) 2^{-2} (۲) 2^{-16} (۳) 2^{-32} (۴) 2^2
- ۸۷۰- اگر $x, y < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x^2}{y}} - \sqrt{\frac{y^2}{x}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{x^2}{y^2}$ (۲) $-\frac{x^2}{y^2}$ (۳) $\frac{y}{x}$ (۴) $\frac{x}{y}$
- ۸۷۱- مقدار $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{8+1}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[3]{4}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$
- ۸۷۲- اگر $a-1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \dots + \sqrt[3]{20}$ ، مقدار $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{12} + \dots + \sqrt[3]{100}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[3]{20a}$ (۲) $\sqrt[3]{4a}$ (۳) $(\sqrt[3]{2}-1)a$ (۴) $(\sqrt[3]{4}-1)a$
- ۸۷۳- اگر $abc < 0$ و $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ ، حاصل عبارت $\frac{a}{\sqrt{a^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2}}$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) 0



سطح

فصل سوم

درس اول / بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های دو عدد مختلف

۱- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $a < b$. در این صورت

• $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ و $a^2 < b^2$

• $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ و $a^3 < b^3$

۲- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند و $a < b$. در این صورت

• $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ و $a^2 < b^2$

• $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ و $a^5 < b^5$

نکته

ریشه سوم -37 بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

- (۱) -7 و -6 (۲) -7 و -8 (۳) -8 و -9 (۴) -9 و -10

راهنما

چون مقدار ریشه سوم عددهای مکعب کامل را می‌دانیم، پس ابتدا دو عدد مکعب کامل متوالی پیدا می‌کنیم که -37 بین آن‌ها باشد.

توجه کنید که $7^3 = 343$ و $8^3 = 512$. پس 37 بین 7^3 و 8^3 است. بنابراین

$$-8^3 < -37 < -7^3 \Rightarrow \sqrt[3]{-8^3} < \sqrt[3]{-37} < \sqrt[3]{-7^3} \Rightarrow \sqrt[3]{(-8)^3} < \sqrt[3]{-37} < \sqrt[3]{(-7)^3} \Rightarrow -8 < \sqrt[3]{-37} < -7$$

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های مختلف یک عدد

• اگر $a > 1$ ، آن‌گاه $1 < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < a < a^2 < a^3 < \dots$

• اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه $\dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < 1$

• اگر $-1 < a < 0$ ، آن‌گاه $-1 < \sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[2]{a} < a < a^2 < a^3 < \dots$

• اگر $a < -1$ ، آن‌گاه $a^5 < a^3 < a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < -1$

- اگر $a > 1$ ، آن‌گاه
- اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه
- اگر $-1 < a < 0$ ، آن‌گاه
- اگر $a < -1$ ، آن‌گاه

نکته

اگر $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ حاصل عبارت $|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}|$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - 2\sqrt[4]{a}$ (۳) $\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$ (۴) $2\sqrt{a} - \sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که $0 < \frac{2}{3} < 1$ پس $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. بنابراین $0 < a < 1$ پس

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$$

همچنین

$$\sqrt{a} < \sqrt[4]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[4]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} - \sqrt{a}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} - \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$$

مقایسه ریشه‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

			۸۷۴- کدام یک تقریب بهتری برای $\sqrt{30}$ است؟
	۲/۵ (۴)	۲/۴ (۳)	۲/۳ (۲) ۲/۲ (۱)
			۸۷۵- کدام عدد بین ۳ و ۴ قرار ندارد؟
	$\sqrt[3]{3-1}$ (۴)	$\sqrt[3]{31-}$ (۳)	$\sqrt[3]{31}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۱)
			۸۷۶- عدد $\sqrt[3]{450}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟
	۸ و ۷ (۴)	۷ و ۶ (۳)	۵ و ۴ (۱) ۶ و ۵ (۲)
			۸۷۷- اگر $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ ، کدام یک درست نیست؟
	$a^2 < \sqrt[3]{a}$ (۴)	$\sqrt{a} < a^2$ (۳)	$\sqrt[3]{a} < a$ (۲) $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ (۱)

سطح ۲

			۸۷۸- اگر $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت $\sqrt{(a-\sqrt{a})^2} + \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})^2} - \sqrt{(a-\sqrt[3]{a})^2}$ کدام است؟
	صفر (۴)	$2\sqrt{a}$ (۳)	$2\sqrt[3]{a}$ (۲) $2a$ (۱)
			۸۷۹- اگر $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$ ، کدام یک درست نیست؟
	$\sqrt{a^2} > \sqrt[3]{a^2}$ (۴)	$\sqrt{a^3} > \sqrt[3]{a^2}$ (۳)	$\sqrt{a} > a$ (۲) $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$ (۱)
			۸۸۰- چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$ ؟
	۱۵ (۴)	۱۴ (۳)	۵ (۱) ۶ (۲)
			۸۸۱- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $\sqrt{2} < \sqrt[3]{n} < \sqrt{3}$ ؟
	۴ (۴)	۳ (۳)	۱ (۱) ۲ (۲)
			۸۸۲- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشه سوم آن در بازه $(2, 3)$ قرار دارد؟
	۲۰ (۴)	۱۹ (۳)	۱۷ (۱) ۱۸ (۲)
			۸۸۳- چند عدد صحیح وجود دارد که حداقل یک ریشه چهارم آن در بازه $(-4, 3)$ قرار داشته باشد؟
	۲۵۶ (۴)	۲۵۵ (۳)	۶۳ (۱) ۶۴ (۲)
			۸۸۴- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشه چهارم مثبت آن بین ۳ و ۴ و ریشه پنجم آن بین ۲ و ۳ است؟
	۱۶۱ (۴)	۱۶۰ (۳)	۱۵۸ (۱) ۱۵۹ (۲)
			۸۸۵- اگر $1 < a < 2$ ، کدام یک درست نیست؟
	$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ (۴)	$\sqrt[3]{a} < \sqrt{a-1}$ (۳)	$\sqrt{a-1} < \sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$ (۱)

سطح ۳

			۸۸۶- اگر $a = \sqrt{2} + \sqrt{45}$ ، $b = \sqrt{5} + \sqrt{18}$ و $c = \sqrt{8} + \sqrt{20}$ ، کدام درست است؟
	$b < c < a$ (۴)	$c < b < a$ (۳)	$b < a < c$ (۲) $a < b < c$ (۱)
			۸۸۷- اگر $0 < a < 1 < b$ ، حاصل عبارت $A = \frac{ \sqrt{a}-\sqrt[3]{a} + \sqrt{b}-\sqrt[3]{b} }{ \sqrt{b}-\sqrt[3]{b} + \sqrt{a}-\sqrt[3]{a} }$ کدام است؟
	\sqrt{a} (۴)	\sqrt{b} (۳)	-۱ (۲) ۱ (۱)

درس دوم / بخش اول: ریشه nام

ریشه nام

$a > 0$	n زوج باشد a دو ریشه nام قرینه دارد: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$
$a > 0$	n فرد باشد a یک ریشه nام دارد: $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد a ریشه nام ندارد.
$a < 0$	n فرد باشد a یک ریشه nام دارد: $\sqrt[n]{a}$

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$.
عدد b را ریشه nام عدد a می‌نامیم، به شرطی که $b^n = a$.
ریشه nام مثبت عدد مثبت a را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.
همچنین، $\sqrt[n]{0} = 0$.

مثال: چون $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$ ، پس ریشه‌های ششم عدد 64 برابر 2 و -2 هستند.
چون $3^7 = 2187$ ، پس $\sqrt[7]{2187} = 3$.

ویژگی‌های ریشه nام

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و m و n عددهایی طبیعی باشند که $m, n \geq 2$ (اگر n زوج باشد، a و b نامنفی‌اند). در این صورت

(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (2) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ($b \neq 0$) (4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(5) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n} = a$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
(6) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b}$.
(7) اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، آن‌گاه $a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$.

تست 1

حاصل $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^6} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^7}$ کدام است؟
 (1) -1 (2) 1 (3) $2\sqrt{2}+1$ (4) $2\sqrt{2}-1$

را حل کنید که

$$\sqrt{(\sqrt{2}-2)^6} = |\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}, \quad \sqrt{(3-\sqrt{2})^7} = 3-\sqrt{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$2-\sqrt{2} - (3-\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}-3+\sqrt{2} = -1$$

تست 2

اگر $\frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{n}$ مقدار $\sqrt[4]{9n+1}$ کدام است؟
 (1) $\sqrt[4]{2}$ (2) 2 (3) 4 (4) $\sqrt[4]{4}$

را حل کنید که

ابتدا توجه کنید که سمت چپ تساوی داده شده برابر است با

$$\frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{4 \times 16}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 16}{8}} = \sqrt[4]{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{n} \Rightarrow n = 8$$

$$\text{در نتیجه } \sqrt[4]{9n+1} = \sqrt[4]{9 \times 8 + 1} = \sqrt[4]{64+1} = 2$$



تست
□□□□

اگر $ab > 0$ و $b\sqrt[6]{a^6} - a = 0$ ، حاصل $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6}$ کدام است؟

- (۱) $1 \pm a$ (۲) $a - 1$ (۳) $b - 1$ (۴) $a - b$

ابتدا توجه کنید که

راهنما

$$b\sqrt[6]{a^6} - a = 0 \Rightarrow b|a| - a = 0 \Rightarrow b|a| = a$$

بنابراین اگر $a > 0$ ، $b = 1$ و اگر $a < 0$ ، $b = -1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6} = |a| + |b| = |a| + 1$ که اگر a مثبت باشد برابر با $1 + a$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1 - a$ است.

تذکره

(۱) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

(۲) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{m+n}}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

(۳) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

تست
□□□□

حاصل $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

می‌توان نوشت

راهنما

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^2} \times 2} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^4}} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2}$$

تست
□□□□

حاصل $A = \sqrt{2^{15} \times 3^8} - \sqrt{2^8 \times 3^{15}}$ کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{6}$ (۲) $-6\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $-\sqrt{6}$

توجه کنید که

راهنما

$$\sqrt{2^{15} \times 3^8} = \sqrt{2^{14} \times 2 \times 3^7 \times 3} = 2^7 \times 3 \times \sqrt{6} = 12\sqrt{6}, \quad \sqrt{2^8 \times 3^{15}} = \sqrt{2^7 \times 2 \times 3^{14} \times 3} = 2 \times 3^7 \times \sqrt{6} = 18\sqrt{6}$$

بنابراین $A = 12\sqrt{6} - 18\sqrt{6} = -6\sqrt{6}$.

تست
□□□□

اگر $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{2}}$ مقدار n کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

می‌توان نوشت

راهنما

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2^2} \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[4]{2^4} \Rightarrow \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[4]{2^4} \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow n = 2$$

تست
□□□□

اگر $\sqrt{a}\sqrt{a} = 2$ مقدار $\sqrt{fa^2}\sqrt{a^2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) 16 (۴) 32

توجه کنید که $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a} = \sqrt[4]{a^2} \times a = \sqrt[4]{a^6} = 2$ ، بنابراین $a^2 = 32$ ، از طرف دیگر،

راهنما

$$\sqrt{fa^2}\sqrt{a^2} = \sqrt{f \times a^4 \times a^2} = \sqrt{f \times a^6} = \sqrt{f} \times \sqrt{a^6} = \sqrt{f} \times \sqrt{a^4 \times a^2} = \sqrt{f} \times \sqrt{a^4} \times \sqrt{a^2} = \sqrt{f} \times (a^2) \times a = \sqrt{f} \times 32 \times a = \sqrt{f} \times 32 \times \sqrt{32} = \sqrt{f} \times 32 \times 4\sqrt{2} = \sqrt{f} \times 128\sqrt{2} = 2^7 \times \sqrt{2} = 2^8 = 256$$



ریشه n ام

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

- ۸۸۸- حاصل $\sqrt{54} + \sqrt{4}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{58}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{112}$ (۴) $5\sqrt{2}$
- ۸۸۹- حاصل $\sqrt{\sqrt{81} - 2\sqrt{3}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt[3]{3}$ (۴) $\sqrt{3}$
- ۸۹۰- حاصل کسر $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{54} + \sqrt{25}}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{4}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{4}}{4}$
- ۸۹۱- مقدار $\frac{\sqrt{125} + \sqrt{4}}{\sqrt{(5\sqrt{5})^2}}$ کدام است؟
 (۱) $5\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$
- ۸۹۲- مقدار $\sqrt{3} \times \sqrt{9}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt[3]{9}$ (۳) $\sqrt{9}$ (۴) $\sqrt{6}$
- ۸۹۳- حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt[3]{8}$
- ۸۹۴- مقدار $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{3}}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\sqrt[3]{27}$ (۳) $\sqrt[3]{9}$ (۴) $\sqrt[3]{27}$
- ۸۹۵- مقدار $\sqrt[3]{\sqrt{2}} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$ (۴) صفر
- ۸۹۶- اگر $a < 0$ و n عددی طبیعی و فرد باشد، حاصل $\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n+1]{a^{n+1}}$ کدام است؟
 (۱) ra (۲) $-ra$ (۳) $a+1$ (۴) صفر
- ۸۹۷- اگر $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = a$ ، مقدار $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$ بر حسب a کدام است؟
 (۱) \sqrt{a} (۲) $\sqrt[3]{a}$ (۳) $a\sqrt{a}$ (۴) $\sqrt{a^2}$

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

سطح ۲

- ۸۹۸- حاصل $\frac{y}{5} \sqrt{\frac{5^2 + 15^2}{y^2 + 21^2}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\Delta}{y}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{y}{\Delta}$ (۴) $(\frac{\Delta}{y})^2$
- ۸۹۹- اگر $\sqrt[m]{5} = a$ ، حاصل عبارت $\frac{a^m - a^n}{a^m + a^n}$ چند است؟ (m و n عددهایی طبیعی اند و $m > n$).
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{\Delta}{4}$



			۹۰۰- اگر $x = \sqrt{\sqrt{5}}$ حاصل $x^7 + x^8$ کدام است؟	۲۵ (۱)	۳۰ (۲)
۳۵ (۴)	۲۰ (۳)				
			۹۰۱- مقدار $a\sqrt{a}$ کدام است؟	۲ (۱)	$2\sqrt{2}$ (۲)
۴ (۴)	$2\sqrt{2}$ (۳)				
			۹۰۲- حاصل $m^7 - m\sqrt{2}$ کدام است؟	۲ (۱)	۴ (۲)
$\sqrt{2}$ (۴)	صفر (۳)				
			۹۰۳- اگر $a = \sqrt{2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}}}$ و $b = \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ مقدار ab کدام است؟	$\frac{1}{2}$ (۱)	۲ (۲)
۴ (۴)	$\frac{1}{4}$ (۳)				
			۹۰۴- اگر $a, b > 0$ حاصل $\sqrt{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a^5}} \times \sqrt{a^2 b^2}$ کدام است؟	۱ (۱)	\sqrt{a} (۲)
\sqrt{ab} (۴)	\sqrt{b} (۳)				
			۹۰۵- حاصل $\sqrt{y-2} \times \sqrt{2-y}$ کدام است؟	$\sqrt{(2-y)^2}$ (۱)	$-\sqrt{4-y^2}$ (۲)
$\sqrt{(y-2)^2}$ (۴)	$-\sqrt{(2-y)^2}$ (۳)				
			۹۰۶- حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{16}} - \sqrt[3]{46} - \frac{2}{\sqrt[3]{16}}$ کدام است؟	$2\sqrt[3]{2}$ (۱)	$2\sqrt[3]{2}$ (۲)
$-2\sqrt[3]{2}$ (۴)	$-2\sqrt[3]{2}$ (۳)				
			۹۰۷- کدام تساوی درست نیست؟	$\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2}$ (۱)	$\sqrt{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (۲)
$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$ (۳)				
			۹۰۸- حاصل $\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt[3]{6}$ کدام است؟	۶ (۱)	$\sqrt{6}$ (۲)
$\sqrt{6}$ (۴)	$\sqrt{6}$ (۳)				
			۹۰۹- مقدار $\frac{\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ کدام است؟	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۱)	$\sqrt{3}$ (۲)
$\frac{1}{\sqrt{9}}$ (۴)	$\sqrt{9}$ (۳)				
			۹۱۰- اگر $\sqrt{\sqrt{2}^{k-2}} = 8$ مقدار k کدام است؟	۱۵ (۱)	۱۸ (۲)
۲۴ (۴)	۲۱ (۳)				
			۹۱۱- اگر $\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{2^{n+5}}$ مقدار n کدام است؟	۱ (۱)	۲ (۲)
۴ (۴)	۳ (۳)				
			۹۱۲- اگر $\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}^k}$ مقدار k کدام است؟	-۱ (۱)	-۲ (۲)
-۴ (۴)	-۳ (۳)				
			۹۱۳- اگر $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt{2}$ مقدار $\sqrt{n+27}$ کدام است؟	۲ (۱)	$\sqrt{2}$ (۲)
$\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt[3]{2}$ (۳)				
			۹۱۴- اگر $\sqrt[3]{9} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$ مقدار n کدام است؟	۱ (۱)	۲ (۲)
۴ (۴)	۳ (۳)				
			۹۱۵- اگر $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^a}$ مقدار a کدام است؟	۹ (۱)	۱۱ (۲)
۱۳ (۴)	۱۲ (۳)				
			۹۱۶- اگر $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt[3]{2}$ کدام گزینه $\sqrt[3]{18}$ را بر حسب a و b درست نشان می‌دهد؟	$b\sqrt{a}$ (۱)	$b\sqrt[3]{a}$ (۲)
$a\sqrt{b}$ (۴)	$a\sqrt{b}$ (۳)				



$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ (۴)	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (۳)	۹۱۷- حاصل $A = \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^2} \times \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2}$ کدام است؟ (۱) $\sqrt{3}-2$ (۲) $2-\sqrt{3}$
$-2\sqrt{3}$ (۴)	$-\sqrt{3}$ (۳)	۹۱۸- اگر $a=1-\sqrt{3}$ و $b = \frac{\sqrt{a^2} \times \sqrt{3a}}{\sqrt{3}-1}$ مقدار $a-b$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) $1+\sqrt{3}$
a^{12} (۴)	a^4 (۳)	۹۱۹- اگر $a = \sqrt[3]{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{3}}}$ کدام گزینه عددی صحیح است؟ (۱) a^{-4} (۲) a^{-12}
$\sqrt[3]{a}$ (۴)	$a\sqrt{a}$ (۳)	۹۲۰- اگر $a > 0$ حاصل $\frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a^3 a}}{\sqrt[3]{a} \sqrt{a}}$ کدام است؟ (۱) $\sqrt{a^2}$ (۲) $a\sqrt{a}$
a^2 (۴)	a (۳)	۹۲۱- عبارت $\sqrt[3]{a^6} \sqrt{a^{-2}}$ چند برابر عبارت $\sqrt[3]{a^6} \sqrt{a}$ است؟ ($a > 0$) (۱) ۱ (۲) ۲
27 (۴)	9 (۳)	۹۲۲- اگر $\sqrt[3]{a} \sqrt{\frac{1}{a}} \times \sqrt[3]{a} = 3$ مقدار a کدام است؟ (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{1}{9}$
2^4 (۴)	2^7 (۳)	۹۲۳- اگر $\sqrt[3]{2\sqrt{x}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}$ مقدار x کدام است؟ (۱) 2^3 (۲) 2^4
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$ (۳)	۹۲۴- اگر $\sqrt{3} = \sqrt[3]{2\sqrt{x}}$ مقدار x کدام است؟ (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
16^0 (۴)	16^2 (۳)	۹۲۵- اگر $\sqrt[3]{16\sqrt{a}} = 2\sqrt[3]{2}$ مقدار a کدام است؟ (۱) 16 (۲) 16^2
126 (۴)	62 (۳)	۹۲۶- اگر $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a+2}} = \sqrt[3]{2}$ مقدار a کدام است؟ (۱) 14 (۲) 30
$\frac{27}{8}$ (۴)	$\frac{27}{4}$ (۳)	۹۲۷- اگر $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2\sqrt{x}} \times \sqrt[3]{x}$ مقدار x کدام است؟ (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{2}$
45 (۴)	30 (۳)	۹۲۸- حاصل $\sqrt{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}}}$ چند است؟ (۱) ۱۰ (۲) ۲۰
$2\sqrt{2}$ (۴)	$2\sqrt{2}$ (۳)	۹۲۹- اگر $\sqrt{x}\sqrt{x} = 2$ مقدار $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ کدام است؟ (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt{2}$
$5\sqrt{5}$ (۴)	25 (۳)	۹۳۰- اگر $\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = 5$ حاصل $\sqrt[3]{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{a}$ کدام است؟ (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۵
$\sqrt[3]{2}$ (۴)	$\sqrt{2}$ (۳)	۹۳۱- اگر $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^{n+2} \sqrt[3]{2^n}}}$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲



فصل سوم

درس دوم / بخش دوم: مقایسه ریشه‌ها

مقایسه ریشه‌های n ام دو عدد مختلف

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

- اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه و در نتیجه
- اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه و در نتیجه

تست ۱

ریشه هفتم چند عدد طبیعی بین ۲ و ۳ است؟

۲=۶۰ (۴)

۲=۵۹ (۳)

۲=۵۸ (۲)

۲=۵۷ (۱)

$$2 < \sqrt[n]{n} < 3 \Leftrightarrow 2^n < n < 3^n \Leftrightarrow 128 < n < 2187$$

چون n عددی طبیعی است، پس $129 \leq n \leq 2186$ ، یعنی تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $2186 - 129 + 1 = 2058$.

راه حل

تست ۲

ریشه ششم مثبت عدد ۹۰۰ در کدام بازه قرار دارد؟

(۴/۵, ۵) (۴)

(۳, ۴) (۳)

(۲/۵, ۳) (۲)

(۱, ۲) (۱)

$$1^6 = 1, \quad 2^6 = 64, \quad 3^6 = 729, \quad 4^6 = 4096$$

به توان ششم عددهای طبیعی توجه کنید:

$$3^6 < 900 < 4^6 \Rightarrow 3 < \sqrt[6]{900} < 4$$

بنابراین

راه حل

تست ۳

اگر $a = \sqrt{2}$ ، $b = \sqrt[3]{3}$ و $c = \sqrt[4]{6}$ ، کدام گزینه درست است؟

$c < b < a$ (۴)

$c < a < b$ (۳)

$b < c < a$ (۲)

$a < b < c$ (۱)

فرجه ریشه‌ها را یکی می‌کنیم: $a = \sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{8}$ ، $b = \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ و $c = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$. اکنون توجه کنید که

$$\sqrt[12]{8} < \sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{216} \Rightarrow c < a < b$$

راه حل

مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد

- اگر m و n عددهایی طبیعی باشند و $m < n$ ، آن‌گاه

$$-a < -1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

- اگر m و n عددهایی طبیعی و فرد باشند و $m < n$ ، آن‌گاه

$$a < -1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

تست ۴

اگر $a = \sqrt{-6}$ ، کدام عدد کوچک‌تر است؟

\sqrt{a} (۴)

$-\sqrt{-a}$ (۳)

\sqrt{a} (۲)

$-\sqrt{-a}$ (۱)

$$-1 < -\sqrt{6} < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt{-6} < 0 \Rightarrow -1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{-a}$$

توجه کنید که

$$-1 < a < 0 \Rightarrow -a < 1 \Rightarrow \sqrt{-a} < \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{-a} < -\sqrt{-a}$$

از طرف دیگر.

اکنون باید مشخص کنیم \sqrt{a} کوچک‌تر است یا $-\sqrt{-a}$. توجه کنید که $\sqrt{a} = -\sqrt{-a}$ و چون $-a < 0$ ، پس

$$\sqrt{-a} < \sqrt{-a} \Rightarrow -\sqrt{-a} < -\sqrt{-a} \Rightarrow \sqrt{a} < -\sqrt{-a}$$

بنابراین \sqrt{a} کوچک‌ترین گزینه است.

راه حل



مقایسهٔ ریشه‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

- ۹۳۲- عدد $\sqrt[3]{1000}$ در کدام بازه قرار دارد؟
 (۱) $(2, 2/5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(4/5, 5)$ (۴) $(5, 6)$
- ۹۳۳- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشهٔ ششم منفی آن در بازه $(-4, -3)$ قرار دارد؟
 (۱) ۳۳۶۳ (۲) ۳۳۶۴ (۳) ۳۳۶۵ (۴) ۳۳۶۶
- ۹۳۴- اگر $0 < a < 1$ ، حاصل $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{1-a} + |\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{1-a}|$ کدام است؟
 (۱) $2\sqrt[3]{a}$ (۲) $2\sqrt[3]{1-a}$ (۳) $\sqrt[3]{a}$ (۴) $\sqrt[3]{1-a}$
- ۹۳۵- اگر $a = \sqrt[3]{1/10}$ ، کدام عدد بزرگتر است؟
 (۱) $\sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt[3]{1-a}$ (۳) $\sqrt[3]{a}$ (۴) $\sqrt[3]{1-a}$

سطح ۲

- ۹۳۶- کدام عدد بزرگتر است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}}$ (۴) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}$
- ۹۳۷- اگر $a = \sqrt{3}$ ، $b = \sqrt{9}$ و $c = \sqrt[3]{27}$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $b < a < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < b < c$ (۴) $a < c < b$
- ۹۳۸- کدام عدد بزرگتر است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt[3]{5}$
- ۹۳۹- اگر $a = \sqrt{-4}$ ، $b = \sqrt{-4}$ و $c = \sqrt{-4}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $a < c < b$ (۳) $b < c < a$ (۴) $c < b < a$
- ۹۴۰- اگر $a = \sqrt{6}$ ، $b = \sqrt[3]{15}$ و $c = \sqrt[3]{22}$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $a < b < c$ (۲) $a < c < b$ (۳) $c < b < a$ (۴) $b < a < c$
- ۹۴۱- کدام گزینه درست است؟
 (۱) $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{11} < 2\sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < 2\sqrt[3]{2}$ (۴) $\sqrt{5} < 2\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{11}$

کنکور سراسری

ریاضی خارج ۹۵

- ۹۴۲- حاصل عبارت $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{216}$ کدام است؟
 (۱) $6\sqrt[3]{2}$ (۲) $3\sqrt[3]{22}$ (۳) $2\sqrt[3]{9}$ (۴) ۶

درس سوم / بخش اول: توان‌های گویا

توان‌های گویا

● فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ ام عدد حقیقی و مثبت a را با $a^{\frac{1}{n}}$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

● اگر a عددی حقیقی و مثبت، m عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد، توان $\frac{m}{n}$ ام a را با $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال:

الف) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

ب) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = \sqrt{243}$

$$2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

توجه

توان‌های گویا و غیر صحیح عددهای متفی را تعریف نمی‌کنیم.

مثال: $(-4)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف نمی‌کنیم. توجه کنید که $\sqrt{(-4)^2} = (-4)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود ولی تساوی $\sqrt{(-4)^2} = (-4)^{\frac{1}{2}}$ برقرار نیست.

تست ۱

حاصل عبارت $\frac{(0.4)^{\frac{1}{2}}}{(0.16)^{\frac{1}{2}}}$ کدام است؟

۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۶ (۲)

۱۰ (۱)

توجه کنید که $(0.4)^{\frac{1}{2}} = ((0.2)^2)^{\frac{1}{2}} = 0.2$ و $(0.16)^{\frac{1}{2}} = ((0.4)^2)^{\frac{1}{2}} = 0.4$

را حل

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} = 0.5$

ویژگی‌های توان‌های گویا

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و مثبت و r و s عددهایی گویا باشند. در این صورت

$$(ab)^r = a^r \times b^r \quad (۳)$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad (۲)$$

$$a^r \times a^s = a^{r+s} \quad (۱)$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (۵)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad (۴)$$

تست ۲

اگر $a^0 = 16$ ، مقدار $a^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

توجه کنید که

را حل

$$a^0 = 16 \Rightarrow (a^0)^{\frac{2}{3}} = 16^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = 16^{\frac{3}{2}}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = (16^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 16^{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = 16^1 = 16$$

بنابراین



مسئله

محاسبات مربوط به ریشه‌ها را می‌توان با تبدیل ریشه‌ها به توان گویا و استفاده از ویژگی‌های توان‌های گویا، راحت‌تر انجام داد.

نست ۳

اگر $a > 0$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
- (۲) $\sqrt[3]{a}$
- (۳) $\frac{1}{\sqrt{a}}$
- (۴) $\sqrt[3]{a}$

می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}}{a^1} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1} = a^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$$

را حل

نست ۴

اگر $a = \sqrt{b^2} \sqrt{b^2} \sqrt{b^2}$ ، آن‌گاه a^8 برابر کدام است؟

- (۱) b^{24}
- (۲) b^{12}
- (۳) b^8
- (۴) b^6

توجه کنید که

$$a = \sqrt{b^2} \sqrt{b^2} \sqrt{b^2} = (b^2)^{\frac{1}{2}} (b^2)^{\frac{1}{2}} \times (b^2)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{2}} \times b^{\frac{2}{2}} \times b^{\frac{2}{2}} = b^1 \times b^1 \times b^1 = b^3$$

بنابراین $a^8 = (b^3)^8 = b^{24}$.

را حل

نست ۵

اگر $\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = 2^a$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{12}$
- (۲) $\frac{13}{12}$
- (۳) $\frac{19}{24}$
- (۴) $\frac{23}{24}$

با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا بعدست می‌آید.

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1+1+1}{3}}} = \sqrt[3]{2^1} = 2^{\frac{1}{3}}$$

بنابراین $a = \frac{19}{24}$.

را حل

نست ۶

اگر $\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{a}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1+1+1}{3}}} = \sqrt[3]{2^1} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

بنابراین

در نتیجه $a^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$ ، پس $a = \frac{1}{4}$.

را حل



توان‌های گویا

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح

کتاب درسی

-۹۴۳ حاصل عبارت $\frac{(-/۶۴)^{۱/۲۵}}{(-/۲)^{-۱/۵}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۲}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

کتاب درسی

-۹۴۴ حاصل کسر $\frac{(-/۰۴)^{۱/۲} \times (۶۲۵)^{-۱/۴}}{(-/۰۰۸)^{-۱/۳}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۵}$ (۲) $\frac{۱}{۲۵}$ (۳) $\frac{۱}{۱۲۵}$ (۴) $\frac{۲}{۲۵}$

کتاب درسی

-۹۴۵ حاصل $\frac{(-/۰۰۰۳۲)^{-۱/۲}}{(-/۲۵)^{-۱/۵}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۵}{۲}$ (۲) $\frac{۲}{۵}$ (۳) $\frac{۴}{۲۵}$ (۴) $\frac{۲۵}{۴}$

کتاب درسی

-۹۴۶ مقدار $(\frac{۱}{۶۴})^{\frac{۵}{۶}} - (\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۴}{۵}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{۱}{۱۶}$ (۲) $\frac{۱}{۱۶}$ (۳) $\frac{۱}{۳۲}$ (۴) $-\frac{۱}{۳۲}$

کتاب درسی

-۹۴۷ مقدار $\frac{-\frac{۱}{۱۲۵}}{۳} + \frac{-\frac{۲}{۴}}{۲۷} + \frac{-\frac{۲}{۵}}{۳۲}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱۰۱}{۳۰}$ (۲) $\frac{۱۰۱}{۶۰}$ (۳) $\frac{۱۰۱}{۱۲۰}$ (۴) $\frac{۱۰۱}{۱۸۰}$

کتاب درسی

-۹۴۸ حاصل عبارت $\frac{\frac{۱}{۶۴۶} \times \frac{۴}{۱۲۵}}{\frac{۳}{۹۲} - \frac{۱}{۸۳}}$ کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰ (۴) ۵

-۹۴۹ حاصل $\frac{\frac{۳}{۸} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۳}{۹۵}}{(\frac{۱}{۴})^{۱/۳} \times (\frac{۱}{۴})^{۱/۵}}$ کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۷۲ (۴) ۱۴۴

-۹۵۰ حاصل $۳^{-\frac{۱}{۲}} \sqrt{۲۷}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۳}$ (۲) $۳\sqrt{۳}$ (۳) ۳ (۴) ۹

-۹۵۱ حاصل عبارت $(\frac{۱}{۶۲} + \frac{۱}{۱۲۲})^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{-\frac{۱}{۲}}$ چند است؟

- (۱) $۲ + \sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۲} - ۲$ (۳) $۲ - \sqrt{۲}$ (۴) $-۲ - \sqrt{۲}$



۹۵۲- حاصل عبارت $\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}}$ کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt{2}$ (۳)	$\frac{1}{2}$ (۲)	$\frac{1}{2}$ (۱)
-----------------	----------------	-------------------	-------------------

۹۵۳- مقدار $\frac{1}{2^2} - 6(\frac{1}{2^2} + 2) + 9\frac{1}{2}$ برابر کدام است؟

۳ (۴)	$2\sqrt{2}$ (۳)	$2\sqrt{2}$ (۲)	$\sqrt{2}$ (۱)
-------	-----------------	-----------------	----------------



۹۵۴- اگر $a^2 = 3^5$ مقدار a^{10} کدام است؟

۲۴۳ (۴)	۸۱ (۳)	۲۷ (۲)	۹ (۱)
---------	--------	--------	-------

۹۵۵- اگر $a^0 = 2\sqrt{2}$ مقدار $\sqrt{a^2}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{3}$ (۴)	$2\sqrt[3]{2}$ (۳)	$2\sqrt[3]{9}$ (۲)	$\sqrt[3]{9}$ (۱)
-------------------	--------------------	--------------------	-------------------

۹۵۶- اگر $a > 0$ حاصل عبارت $(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}})^{\frac{2}{5}}$ کدام است؟

$\sqrt[5]{a}$ (۴)	$\sqrt[5]{a}$ (۳)	$\sqrt[5]{a}$ (۲)	$\sqrt[5]{a}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۹۵۷- حاصل $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{128}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{2}$ (۴)	$\sqrt[3]{2}$ (۳)	۴ (۲)	۲ (۱)
-------------------	-------------------	-------	-------

۹۵۸- حاصل عبارت $\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴)	$\sqrt[3]{25}$ (۳)	$\sqrt{5}$ (۲)	۵ (۱)
----------------	--------------------	----------------	-------

۹۵۹- مقدار $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

۴ (۴)	$2\sqrt[3]{2}$ (۳)	$\sqrt[3]{2}$ (۲)	$\sqrt[3]{2}$ (۱)
-------	--------------------	-------------------	-------------------

۹۶۰- حاصل $A = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{9\sqrt[3]{3}}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{12}$ (۴)	$\sqrt[3]{54}$ (۳)	$\sqrt[3]{6}$ (۲)	$\sqrt[3]{54}$ (۱)
--------------------	--------------------	-------------------	--------------------

۹۶۱- ساده شده عبارت $A = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^2}$ (۴)	$\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^5}$ (۳)	$\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^5}$ (۲)	$\sqrt[3]{6^5}$ (۱)
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------

۹۶۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ (۴)	$\sqrt[3]{x^2}$ (۳)	$\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ (۲)	$\sqrt{x^2}$ (۱)
----------------------------	---------------------	----------------------------	------------------

۹۶۳- اگر $a > 0$ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}}$ کدام است؟

\sqrt{a} (۴)	$\sqrt[3]{a}$ (۳)	$\sqrt[3]{a}$ (۲)	\sqrt{a} (۱)
----------------	-------------------	-------------------	----------------



			۹۶۴- اگر $a^{-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{5}}$ ، آن‌گاه $a^{\frac{1}{5}}$ برابر کدام است؟ ($a, b > 0$)
$b^{\frac{1}{10}}$ (۴)	$b^{\frac{1}{5}}$ (۳)	$b^{\frac{1}{25}}$ (۲)	$b^{\frac{1}{10}}$ (۱)
			۹۶۵- اگر $a^{-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}$ ، آن‌گاه $a^{-\frac{1}{2}}$ برابر کدام است؟
$\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$ (۴)	$\frac{1}{b^{\frac{1}{4}}}$ (۳)	$\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$ (۲)	$\frac{1}{b^{\frac{1}{4}}}$ (۱)
			۹۶۶- اگر $a = \sqrt[3]{2\sqrt{8}}$ ، مقدار $\sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟
$\sqrt[3]{16}$ (۴)	$\sqrt[3]{16}$ (۳)	۲ (۲)	$\sqrt[3]{8}$ (۱)
			۹۶۷- اگر $(\frac{y}{x})^{n-1}$ ، مقدار a^n کدام است؟
y^{2-n} (۴)	y (۳)	y^{n-2} (۲)	۱ (۱)
			۹۶۸- اگر $\sqrt[3]{2^6 \sqrt[3]{2^2 \sqrt[3]{2^2}}} = \sqrt[3]{2^a}$ ، مقدار a کدام است؟
$2=8$ (۴)	$1=4$ (۳)	154 (۲)	52 (۱)
			۹۶۹- اگر $a > 0$ ، حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^2}})^{\frac{1}{5}}$ کدام است؟
$\frac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$ (۴)	\sqrt{a} (۳)	a (۲)	$a^{\frac{1}{5}}$ (۱)
			۹۷۰- اگر $a > 0$ ، حاصل $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a^2}{a}}}$ کدام است؟
$\sqrt[3]{a^2}$ (۴)	$\sqrt[3]{a}$ (۳)	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ (۲)	۱ (۱)
			۹۷۱- اگر $a > 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt[3]{a \times \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a \times \sqrt[3]{a}}}$ کدام است؟
\sqrt{a} (۴)	$\sqrt[3]{a^2}$ (۳)	$\sqrt[3]{a}$ (۲)	$\sqrt[3]{a}$ (۱)
			۹۷۲- مقدار a کدام است؟ $\frac{\sqrt{a \times \sqrt[3]{a \times \sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a \times \sqrt[3]{a \times \sqrt[3]{a}}}} = 2$
16 (۴)	$2\sqrt{2}$ (۳)	4 (۲)	2 (۱)
			۹۷۳- مقدار n کدام است؟ $\sqrt[5]{5^{\frac{n-1}{2}}} = (\frac{1}{125})^{-1}$
31 (۴)	21 (۳)	17 (۲)	11 (۱)
			۹۷۴- اگر $\sqrt[3]{5} = ((125)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ ، مقدار n کدام است؟
6 (۴)	3 (۳)	2 (۲)	1 (۱)
			۹۷۵- مقدار n کدام است؟ $\frac{\sqrt[3]{3^n \times \sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3}} = (\frac{1}{81})^{-2}$
22 (۴)	19 (۳)	17 (۲)	13 (۱)
			۹۷۶- اگر $x = \sqrt[3]{2^{15}}$ ، حاصل $x \times \sqrt{x} \times \sqrt[5]{x^2}$ کدام است؟
$\sqrt[3]{2^6}$ (۴)	4 (۳)	$\sqrt{2}$ (۲)	2 (۱)



- ۹۷۷- اگر $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{v}}}} = v^k$ مقدار k کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$
- ۹۷۸- اگر $\sqrt{\frac{9}{\sqrt{81}}} = 3^k$ مقدار k کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$
- ۹۷۹- اگر $\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}} = 2^a$ مقدار a کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{5}{2}$
- ۹۸۰- اگر $\sqrt[5]{125\sqrt{5}} = (5^n)^5$ مقدار n کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{21}$ (۲) $\frac{4}{21}$
- ۹۸۱- اگر $\frac{\sqrt{5\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = 5^k$ مقدار k کدام است؟
 (۱) $\frac{11}{13}$ (۲) $\frac{11}{9}$
- ۹۸۲- اگر $\frac{a\sqrt{a\sqrt{a} \times \sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^s$ مقدار s کدام است؟
 (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) ۵
- ۹۸۳- اگر $\sqrt[3]{9\sqrt{\frac{1}{\sqrt{48}}}} = 3^{\frac{n}{f}}$ مقدار n کدام است؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۵
- ۹۸۴- اگر $\sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2^n}} = 2$ مقدار n کدام است؟
 (۱) ۴۵ (۲) ۴۶
- ۹۸۵- اگر $\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2^k}}$ مقدار k کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۲
- ۹۸۶- اگر $\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{x}}} = 4$ مقدار x کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸
- ۹۸۷- اگر $\sqrt{a\sqrt{a}} = f$ مقدار $\sqrt{a+\sqrt{a}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{-}$ (۲) $\sqrt{8}$
- ۹۸۸- اگر $a=5^5$ و $b=7^5$ حاصل 35^5 برحسب a و b کدام است؟
 (۱) $\frac{5a}{7b}$ (۲) $\frac{7ab}{25}$
- $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$
- $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{2}{15}$
- $-\frac{5}{12}$ (۳) $-\frac{5}{12}$ (۴) $-\frac{5}{6}$
- $\frac{5}{21}$ (۳) $\frac{5}{21}$ (۴) $\frac{8}{21}$
- $\frac{11}{13}$ (۳) $\frac{11}{13}$ (۴) $\frac{11}{12}$
- $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$
- ۷ (۳) ۹ (۴) ۷
- ۲۸ (۳) ۵۴ (۴) ۲۸
- $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۱۶
- ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲
- $\frac{27}{25}$ (۳) $\frac{27}{25}$ (۴) $\frac{a+1}{b+1}$



۹۸۹- حاصل عبارت $(a\sqrt[n]{a^{1-n}}\sqrt[n]{a^{1-n}})-\sqrt[n]{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{n}$ (۳) a^{-n} (۴) n^a

۹۹۰- اگر $\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a^{n+1}}}{\sqrt[n]{4^{2n+2}}}}=2$ مقدار n کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۴ (۴) ۱۲۰

۹۹۱- اگر $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times \dots \times 2^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{2}}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۹۹۲- اگر $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{a} = 6^{\frac{1}{2}}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۹۳- اگر $x \times \sqrt{x^2} \times \sqrt{x^2} = 3^{12}$ حاصل $\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt[3]{3^2}$ (۳) ۳ (۴) 3^2

۹۹۴- اگر $\sqrt{y}=3$ و $\sqrt{x}=8$ حاصل $\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{y}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{27}$ (۲) $3\sqrt[3]{3}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt[3]{3}$

۹۹۵- اگر $\sqrt{a}\sqrt{b}=4$ و $\sqrt{b}\sqrt{a}=6$ مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{2}{3})^5$ (۲) $(\frac{2}{3})^6$ (۳) $(\frac{2}{3})^9$ (۴) $(\frac{2}{3})^{15}$

۹۹۶- اگر $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) ۲۵

۹۹۷- معادله $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} \times \sqrt{\sqrt{x}} = 10$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۹۸- اگر $(\frac{2}{3})^x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}$ مقدار x چند است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۹۹۹- اگر $\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{x} = 2^5$ مقدار x کدام است؟

- (۱) 2^{-12} (۲) 2^{12} (۳) 2^8 (۴) 2^{-8}

۱۰۰۰- اگر $\sqrt{x}\sqrt{4} = \sqrt{x}\sqrt{2}$ مقدار x کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰۰۱- اگر $2\sqrt{2}\sqrt{2} = x\sqrt{x}\sqrt{x}$ حاصل $x\sqrt{x}\sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{128}$ (۲) $2^2\sqrt{128}$ (۳) $4\sqrt{128}$ (۴) $4^2\sqrt{128}$

۱۰۰۲- اگر $a^2b^2 = 16\sqrt{2}$ مقدار $\sqrt{a}\sqrt{b} \times \sqrt{b}\sqrt{a}$ کدام است؟ ($a, b > 0$)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[4]{8}$ (۴) $\sqrt{8}$

فصل سوم

درس سوم / بخش دوم: مقایسه توان‌ها

مقایسه توان‌های گویای یک عدد

- ۱- فرض کنید a عددی حقیقی باشد که $a > 1$ و r و s عددهایی گویا و مثبت باشند.
- $a^r > 1$
 - اگر $r > s$ ، آن‌گاه $a^r > a^s$.
- ۲- فرض کنید a عددی حقیقی باشد که $0 < a < 1$ و r و s عددهایی گویا و مثبت باشند.
- $a^r < 1$
 - اگر $r > s$ ، آن‌گاه $a^r < a^s$.

مثال: چون ۲ از ۱ بزرگ‌تر است، پس هر توان مثبت آن هم از ۱ بزرگ‌تر است. مثلاً

$$\frac{2}{25} > 1, \quad \frac{2}{2^3} > 1$$

همچنین، 2^5 از 2^4 کوچک‌تر است چون $\frac{1}{5}$ از $\frac{1}{4}$ کوچک‌تر است.

مثال: چون $\frac{3}{4}$ از ۱ کوچک‌تر است، پس هر توان مثبت آن هم از ۱ کوچک‌تر است. مثلاً

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 < 1, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 < 1$$

همچنین، $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ از $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ بزرگ‌تر است چون $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{4}$ کوچک‌تر است.

توجه

- اگر $0 < x < 1$ ، $a = \sqrt{x}$ ، $b = \sqrt[3]{x}$ و $c = \sqrt[5]{x}$ ، کدام گزینه درست است؟
- (۱) $c < b < a$
 - (۲) $c < a < b$
 - (۳) $b < c < a$
 - (۴) $b < a < c$

توجه کنید که $a = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ، $b = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ و $c = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$. از طرف دیگر $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ و چون $0 < x < 1$ ، پس

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^5} \Rightarrow c > a > b$$

را حل

مقایسه توان‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۰۰۳- اگر $a = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{5}}$ ، $b = (\frac{1}{3})^{\frac{2}{7}}$ و $c = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{11}}$ کدام درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $c < a < b$ (۳) $c < b < a$ (۴) $b < c < a$

۱۰۰۴- اگر $x = 9^{\frac{2}{3}}$ ، $y = 81^{\frac{2}{3}}$ و $z = 243^{\frac{2}{5}}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x > y > z$ (۲) $y > x > z$ (۳) $y > x = z$ (۴) $x = z > y$

۱۰۰۵- کدام عدد بزرگتر است؟

- (۱) $2^{\frac{3}{2}}$ (۲) $2^{\frac{4}{3}}$ (۳) $2^{\frac{5}{4}}$ (۴) $2^{\frac{6}{5}}$

۱۰۰۶- کدام عدد کوچکتر است؟

- (۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$ (۲) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{2}{5}}$ (۳) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{3}{7}}$ (۴) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{4}{9}}$

سطح ۲

۱۰۰۷- کدام عدد از بقیه کوچکتر است؟

- (۱) $64^{\frac{1}{5}}$ (۲) $32^{\frac{1}{4}}$ (۳) $16^{\frac{1}{3}}$ (۴) $8^{\frac{1}{2}}$

۱۰۰۸- اگر $a = \sqrt[3]{4}$ ، $b = \sqrt[3]{64}$ و $c = \sqrt[3]{256}$ کدام یک درست است؟

- (۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $b < a < c$ (۴) $c < a < b$

۱۰۰۹- اگر $x > 1$ ، $a = \sqrt{x^2}$ ، $b = \sqrt[3]{x^3}$ و $c = \sqrt[4]{x^4}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a > b > c$ (۲) $b < a < c$ (۳) $c < a < b$ (۴) $a > c > b$

۱۰۱۰- اگر $0 < a < 1$ ، $x = \sqrt{a^2}$ ، $y = \sqrt[3]{a^3}$ و $z = \sqrt[4]{a^4}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $z < y < x$ (۲) $z < x < y$ (۳) $x < y < z$ (۴) $x < z < y$

۱۰۱۱- اگر $a = \sqrt{2} - 1$ ، کدام عدد بزرگتر است؟

- (۱) $\sqrt{a^2}$ (۲) $\sqrt[3]{a^3}$ (۳) $\sqrt[4]{a^4}$ (۴) $\sqrt[5]{a^5}$

۱۰۱۲- اگر $(fa)^{\frac{2}{3}} > 8a^{\frac{2}{3}}$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a < \frac{1}{4}$ (۲) $0 < a < \frac{1}{2}$ (۳) $a > \frac{1}{8}$ (۴) $a > \frac{1}{4}$

۱۰۱۳- اگر $a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{3}{7}}$ و $(\frac{f}{\delta})^{\frac{2}{3}} > (\frac{f}{\delta})^{\frac{2}{5}}$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $0 < a < 1$ (۲) $0 < a < \frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3} < a < 1$ (۴) $1 < a < \frac{2}{3}$



سطح

۱۰۱۴- اگر $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b^2}$ و $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt{c^2 \sqrt{c^2}}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a^2 < c$ (۲) $c^2 = a^2$ (۳) $c^2 = a^2$ (۴) $a > c$

۱۰۱۵- اگر $a = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ ، $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$ و $c = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام درست است؟
 (۱) $a > b > c$ (۲) $b > a > c$ (۳) $c > a > b$ (۴) $c > b > a$

کنکور سراسری

ریاضی ۹۸

۱۰۱۶- اگر $A = \sqrt[3]{4\sqrt{16}} (\frac{1}{4})^{-\frac{2}{3}}$ ، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{2}}$ کدام است؟
 (۱) $=/25$ (۲) $=/5$ (۳) $=/75$ (۴) ۱

ریاضی خارج ۹۸

۱۰۱۷- اگر $A = \sqrt[3]{1\sqrt{3}} (12)^{-1/5}$ ، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

درس چهارم / بخش اول: اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

این تساوی را اتحاد مربع مجموع دو جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مربع مجموع دو جمله برابر است با مجموع مربع‌های این دو جمله و دو برابر حاصل ضرب آن‌ها. به عبارت دیگر،

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله اول}} + \underbrace{2ab}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + \underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله دوم}}$$

به همین ترتیب، اتحاد مربع تفاضل دو جمله به صورت زیر است:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

الف) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

ب) $(3-\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\sqrt{2}) + \sqrt{2}^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

اگر $a+b=4$ و $a^2+b^2=12$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۶

بنابر اتحاد مربع مجموع دو جمله،

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 4^2 = 12 + 2ab \Rightarrow 2ab = 4 \Rightarrow ab = 2$$

مقدار $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{6})^2$ کدام است؟

- ۱) $8\sqrt{6}$ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) $12+8\sqrt{6}$

توجه کنید که بنابر اتحاد‌های مربع تفاضل و مجموع دو جمله،

$$(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 - 2(\sqrt{2})(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2(2)(\sqrt{6}) + \sqrt{6}^2 = 2 - 4\sqrt{6} + 12 + 4 + 4\sqrt{6} + 6 = 24$$

مقدار $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2} + 3$ ۴) $\sqrt{3} + 2$

اگر عبارت‌های زیر رادیکال را به صورت مربع مجموع یا تفاضل دو عدد بنویسیم. محاسبات ساده می‌شوند. از الگوی اتحاد‌های مربع مجموع و تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{2} = \sqrt{3}+2$.



تست ۴

اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

طرفین تساوی $x - \frac{1}{x} = 3$ را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد مربع تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

را حل

تست ۵

اگر $a + \frac{3}{2a} = 4$ مقدار $4a^2 + \frac{9}{a^2}$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۶ (۲) ۵۲ (۳) ۷۶ (۴)

توجه کنید که $12 - \left(4a + \frac{9}{a}\right)^2 = 4a^2 + \frac{9}{a^2} - (2a + \frac{3}{a})^2$. از طرف دیگر، بنا بر فرض $a + \frac{3}{2a} = 4$ ، اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، بدست می‌آید

$$2a + \frac{3}{a} = 8. \text{ بنا بر این، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } 8^2 - 12 = 52.$$

را حل

تست ۶

اگر $a + b = 3$ و $a^2b + ab^2 = -3$ ، حاصل $a^2 - ab + b^2$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۲۸ (۳) ۳۹ (۴)

توجه کنید که

$$a^2b + ab^2 = ab(a+b) = -3 \xrightarrow{a+b=3} ab = -1.$$

بنابراین

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = 9 - 3(-1) = 39$$

را حل

تست ۷

اگر $a + b = \sqrt{ab}$ ، حاصل $A = \frac{a^2 + b^2 + 3ab}{a^2 + b^2 - 4ab}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴)

اگر طرفین رابطه $a + b = \sqrt{ab}$ را به توان ۲ برسانیم، آن‌گاه

$$(a+b)^2 = (\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab$$

بنابراین عبارت مورد نظر به شکل $A = \frac{a^2 + b^2 + 3ab}{a^2 + b^2 - 4ab} = \frac{2ab + 3ab}{2ab - 4ab} = \frac{5ab}{-2ab} = -\frac{5}{2}$ ساده می‌شود.

را حل

تست ۸

اگر $2 = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ ، حاصل $5x - x^2$ کدام است؟

- $\frac{17}{4}$ (۱) $\frac{15}{4}$ (۲) $\frac{13}{4}$ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴)

ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 = x - 1 + 4 - x + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} = 3 + 2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}$$

بنابراین $\sqrt{5x - x^2} - 4 = \frac{1}{2}$ در نتیجه

$$5x - x^2 - 4 = \frac{1}{4} \Rightarrow 5x - x^2 = \frac{17}{4}$$

را حل



تست ۹

اگر $2x^2 - 6x + 1 = 0$ حاصل $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۲ (۴)

راه‌حل

ابتدا تساوی داده شده را به شکل $2x^2 + 1 = 6x$ بازنویسی می‌کنیم. اگر دو طرف این تساوی را بر x تقسیم کنیم، به دست می‌آید $2x + \frac{1}{x} = 6$. اکنون

به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، به دست می‌آید

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(2x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 36 - 4 = 32$$

تست ۱۰

اگر $\frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{1}$ حاصل $\frac{x^2}{x^2 + 5x^2 + 4}$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴)

راه‌حل

رابطه داده شده را به صورت $\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = 1$ می‌نویسیم. پس

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = 1 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 7$$

حال، طرفین رابطه اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = 49 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 5 = 50 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x^2 + 4}{x^2} = 50$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{50}$$

تست ۱۱

مقدار عبارت $x^2 - 4x^2 + x + 2$ به ازای $x = 2 - \sqrt{3}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \Rightarrow (x - 2)^2 = (-\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

در نتیجه

$$x^2 - 4x^2 + x + 2 = x(x^2 - 4x + 1) + 2 = 2$$



اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



کتاب درسی

۱۰۱۸- ساده شده عبارت $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$ کدام است؟

- (۱) $2(a+b)$ (۲) $2\left(\frac{a+b}{b} + \frac{b}{a}\right)$ (۳) 2 (۴) 4

کتاب درسی

۱۰۱۹- مقدار عبارت $A = (x-1)^2 + (x+1)^2 - (\sqrt{2}x-1)^2$ به ازای $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $1 + 2\sqrt{2}$ (۳) 2 (۴) 5

۱۰۲۰- اگر $a+b=4$ و $ab=\frac{1}{2}$ مقدار a^2+b^2 کدام است؟

- (۱) 14 (۲) 15 (۳) 16 (۴) 17

۱۰۲۱- مقدار عبارت x^2+4x به ازای $x = \sqrt{3}-2$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) 1 (۴) 2

۱۰۲۲- اگر $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 6$ حاصل $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ کدام است؟

- (۱) 60 (۲) 62 (۳) 64 (۴) 28

۱۰۲۳- اگر $\frac{a^2+1}{a} = 3$ مقدار $\frac{a^4+1}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 11 (۳) 7 (۴) 5

۱۰۲۴- اگر $x + \frac{3}{2x} = 3$ حاصل عبارت $4x^2 + \frac{9}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) 24 (۲) 48 (۳) 12 (۴) 36

۱۰۲۵- اگر $xy=2$ و $x^2+y^2=5$ حاصل $x^4-14x^2y^2+y^4$ کدام است؟

- (۱) 26 (۲) 13 (۳) -13 (۴) -29

۱۰۲۶- اگر $a + \frac{1}{a+2} = 4$ مقدار عبارت $(a+2)^2 + \frac{1}{(a+2)^2}$ کدام است؟

- (۱) 24 (۲) 30 (۳) 24 (۴) 26



۱۰۲۷- اگر $a-b=3$ و $ab=2$ حاصل a^2+b^2 کدام است؟

- (۱) 177 (۲) 161 (۳) 27 (۴) 17

۱۰۲۸- اگر $a^2+b^2=5ab$ و $a>b>0$ مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{y}{3}}$ (۳) $\sqrt{\frac{A}{3}}$ (۴) $\sqrt{\frac{9}{2}}$



۱۰۲۹- اگر $|a| - \frac{1}{a} = 1$ ، حاصل $|a| + \frac{1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $-\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{5}$

۱۰۳۰- اگر $-\frac{1}{2} = \frac{(x-7)(y-8)}{(x-7)^2 + (y-8)^2}$ ، حاصل $x+y$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۵ (۳) ۱ (۴) ۲۲

۱۰۳۱- مقدار $\sqrt{3-2\sqrt{3}}\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۳۲- مقدار $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۱۰۳۳- اگر بدانیم $a+b=\sqrt{75}$ و $b+\frac{1}{a}=\sqrt{27}$ ، حاصل $a^2 + \frac{1}{a^2}$ چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۰۳۴- اگر $a+2b=\sqrt{12}$ و $\frac{1}{a}+b=\sqrt{48}$ ، مقدار $a^2 + \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۲ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۰۸

۱۰۳۵- اگر $x - \frac{1}{x-2} = 4$ ، حاصل $\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2 + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۰۳۶- حاصل عبارت $\sqrt{(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (۲) $1-2\sqrt{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{2}{2}-2\sqrt{2}$

۱۰۳۷- اگر $\sqrt{11+\sqrt{72}} = x + \sqrt{2}$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۹

۱۰۳۸- مقدار $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۱۴ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) ۲۸



۱۰۳۹- اگر $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\frac{x^2}{x^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{11}$

۱۰۴۰- اگر $\frac{x}{x^2-3x+4} = \frac{1}{2}$ ، حاصل $\frac{x^2}{x^2-x^2+16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{17}$



۱۰۴۱- اگر $a^2 - 4a + 2 = 0$ ، مقدار $a^2 + \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۰۴۲- اگر $a + 2\sqrt{a} = 1$ ، حاصل $a^2 - 6a$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۰۴۳- اگر $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، مقدار $x^4 - 2x^3$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۰۴۴- عدد $2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\sqrt{1}-\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{14}-2$

۱۰۴۵- مقدار عبارت $2x^2 - 4x^2 - 8x + 2$ به ازای $x = 1 - \sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴۶- مقدار عبارت $2a^2 + 7a^2 - 2a - 12$ به ازای $a = \sqrt{5} - 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $16a$ (۳) $8a$ (۴) 24

۱۰۴۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$
 (۳) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$

۱۰۴۸- اگر $a = \sqrt{7} + \sqrt{21}$ ، $b = \sqrt{10} + 2\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{13} + \sqrt{15}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $c < b < a$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < c < b$ (۴) $a < b < c$

۱۰۴۹- کدام عدد از بقیه بزرگ تر است؟

- (۱) $3 - \sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6} - 2$ (۳) $2\sqrt{6} - 7$ (۴) $\sqrt{8} - \sqrt{6}$

۱۰۵۰- کمترین مقدار ممکن عبارت $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 10$ کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۲۰ (۳) -۱۹ (۴) -۱۸

۱۰۵۱- اگر $a - b = 1 + \sqrt{2}$ و $b - c = 1 - \sqrt{2}$ ، مقدار عبارت $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۵۲- چند عدد طبیعی مانند m می‌توان پیدا کرد که $((3 + 2\sqrt{5})^n - m)^2$ عددی طبیعی باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی

۱۰۵۳- ساده شده عبارت $\sqrt{2 - 2\cos\alpha} - \sin^2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $1 - \cos\alpha$ (۲) $1 - |\cos\alpha|$ (۳) $1 - |\sin\alpha|$ (۴) $1 - \sin\alpha$

۱۰۵۴- ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{\sin^2 15^\circ + 4\cos^2 15^\circ} - 2}{\sqrt{\cos^2 15^\circ + 4\sin^2 15^\circ} - 2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan^2 15^\circ$ (۳) $\cot^2 15^\circ$ (۴) $\sin^2 15^\circ$

۱۰۵۵- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2\alpha} - \sin^2\alpha}$ به ازای $\alpha = 10^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\sin 10^\circ - \cos 10^\circ$ (۲) $\sin 10^\circ - \cos 10^\circ$ (۳) $-\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$ (۴) $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$

فصل سوم

درس چهارم / بخش دوم: اتحاد مزدوج

اتحاد مزدوج

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

این تساوی را اتحاد مزدوج می‌نامند. طبق این اتحاد، حاصل ضرب دو برانتز که یکی تفاضل دو جمله و دیگری مجموع این دو جمله است، برابر است با تفاضل مربع جمله اول و مربع جمله دوم (این دو برانتز را مزدوج یکدیگر می‌نامند).

مثال:

الف) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = \sqrt{7}^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$

ب) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{مزدوج}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{مزدوج}} = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2)^2 - 1 = x^4 - 1$

تسبیح

مقدار $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{16}$

ب) $\frac{1}{8}$

ج) $\frac{1}{4}$

د) $\frac{1}{2}$

می‌توان نوشت

را حل

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{36-20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

تسبیح

مقدار $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ کدام است؟

الف) $2\sqrt{3}$

ب) $2\sqrt{2}$

ج) $\sqrt{3}$

د) $\sqrt{2}$

را حل اول توجه کنید که

را حل

$$\begin{aligned} 5-2\sqrt{6} &= \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2, & 5+2\sqrt{6} &= \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \\ \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

در نتیجه

را حل دوم فرض کنید $x = \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$. در این صورت

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2 + (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^2 + 2\sqrt{5-2\sqrt{6}} \times \sqrt{5+2\sqrt{6}} = 5-2\sqrt{6} + 5+2\sqrt{6} + 2\sqrt{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} \\ &= 10 + 2\sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = 10 + 2\sqrt{25-24} = 10 + 2 = 12 \end{aligned}$$

بنابراین $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

تسبیح

اگر $a = 7-4\sqrt{3}$ و $b = (2+\sqrt{3})^2$ حاصل $a^{\wedge}b^{\wedge}$ کدام است؟

الف) $2\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{2}$

ج) 2

د) 1

را حل اول توجه کنید که $b = (2+\sqrt{3})^2 = 4+3+2 \times 2 \times \sqrt{3} = 7+4\sqrt{3}$. در نتیجه

را حل

$$ab = (7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow a^{\wedge}b^{\wedge} = (ab)^{\wedge} = 1^{\wedge} = 1$$

را حل دوم توجه کنید که $a = 7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. در نتیجه $ab = (2-\sqrt{3})^2 \times (2+\sqrt{3})^2 = ((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^2 = 1$

بنابراین $a^{\wedge}b^{\wedge} = (ab)^{\wedge} = 1^{\wedge} = 1$.



تسبیح
0000

حاصل عبارت $(3+\sqrt{5}-\sqrt{14})(3+\sqrt{14}+\sqrt{5})$ کدام است؟

- ۴ (۱) $2\sqrt{5}$ ۲ (۲) $6\sqrt{5}$ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۴

بنابر اتحاد مزدوج.

را حل

$$(3+\sqrt{5}+\sqrt{14})(3+\sqrt{5}-\sqrt{14}) = (3+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{14})^2 = 9 + 6\sqrt{5} - 14 = 6\sqrt{5}$$

تسبیح
0000

حاصل عبارت $\sqrt{2+2\sqrt{2}} \times \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ ۲ (۲) $\sqrt{4}$ ۳ (۳) $\sqrt{4}$ ۴ (۴) $\sqrt{2}$

چون $6-4\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^2$ پس $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(2+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2(1+\sqrt{2})\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

را حل

تسبیح
0000

اگر $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3} = -\frac{1}{12}$ مقدار $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

فرض می‌کنیم مقدار عبارت خواسته شده برابر a باشد. یعنی $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$. طرفین تساوی بالا و تساوی $-\frac{1}{12} = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}$ را در

یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$-\frac{1}{12}a = (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}) \Rightarrow -\frac{a}{12} = x-1 - (x+3) \Rightarrow -\frac{a}{12} = -4 \Rightarrow a = 48$$

را حل

تسبیح
0000

اگر $a = (3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$ مقدار 3^{16} برحسب a کدام است؟

- ۸a (۱) ۸a+1 (۲) ۸a-1 (۳) 9a-1 (۴)

دو طرف تساوی داده شده را در 3^2-1 ضرب می‌کنیم:

$$(3^2-1)a = (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) = (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1) = (3^8-1)(3^8+1) = 3^{16}-1$$

بنابراین $3^{16}-1 = 8a$ در نتیجه $8a = 3^{16}$.

را حل

اتحاد مزدوج

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۰۵۶- حاصل $\sqrt{5-\sqrt{21}} \times \sqrt{5+\sqrt{21}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۵۷- حاصل عبارت $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ به ازای $x=\sqrt{18}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۱۰۵۸- مقدار عبارت $A = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ به ازای $x = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۵۹- اگر $a = \sqrt{2} + 1$ ، حاصل عبارت $a(a-1)(a-2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۰- اگر $a = \sqrt{6} - 2$ و $b = \sqrt{6} + 2$ ، مقدار $\frac{a-b}{b-a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۱- اگر $a = \sqrt{6} + 1$ و $b = \sqrt{6} - 1$ ، مقدار عبارت $\frac{a+b}{b-a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سطح ۲

۱۰۶۲- واسطه هندسی عددهای $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ و $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۳- عبارت $(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}})^2$ با کدام عدد زیر برابر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۴- اگر $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a+b)^6$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۵- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{24-4}}{\sqrt{24+4}} - \frac{\sqrt{24+4}}{\sqrt{24-4}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۶- اگر $a-b = b-c = 5$ ، مقدار عبارت $a^2 - 2b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۷- اگر $a^y = \sqrt{5} + 2$ و $b^x = \sqrt{5} - 2$ ، مقدار $(ab)^{56}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۶۸- حاصل عبارت $\frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۰۶۹- اگر $a = \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1}$ حاصل $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}-2}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2a}$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{a}{2}$ (۴) $2a$

۱۰۷۰- اگر $a = 3^x - 1$ مقدار عبارت $(3^{x+1})(3^{2x+1})(3^{4x+1})$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{1}{a+1}$ (۴) $\frac{2}{a+1}$

۱۰۷۱- اگر $A = \sqrt{2}(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$ مقدار عبارت $\sqrt{A+256}$ به ازای $x = 2 + \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $6 + 4\sqrt{2}$ (۳) $6 + 2\sqrt{2}$ (۴) $4 + 2\sqrt{2}$

۱۰۷۲- a, b و c عددهای حقیقی و مثبت‌اند. $a+b+c=16$ و b واسطه هندسی a و c است. مقدار $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۰۷۳- ساده شده عبارت $(1-\sqrt{2})\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۰۷۴- اگر $A = (2-\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})$ و $B = 5 + \sqrt{27}$ حاصل $\frac{2A}{B} + 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $2 - \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

۱۰۷۵- حاصل عبارت $(\sqrt{243} - \sqrt{243})(\sqrt{49} + \sqrt{81})$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۰۷۶- حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(12-2\sqrt{35})}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{7}$

۱۰۷۷- مقدار $\sqrt{1+2\sqrt{5}} \times \sqrt{\sqrt{5}-2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۴

۱۰۷۸- حاصل عبارت $\sqrt{1-\sqrt{2}} \times \sqrt{2+2\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۰۷۹- مقدار $\sqrt{3+\sqrt{2}} \times \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{7}$

۱۰۸۰- حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{6}+2} \times \sqrt{\sqrt{6}-2} \times \sqrt{\sqrt{6}-2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۸۱- حاصل عبارت $\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۸۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}} \times \sqrt{17-6\sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}+1$ (۴) $\sqrt{2}-1$

۱۰۸۳- اگر $a = \sqrt{5}+1$ حاصل عبارت $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a-1}$ (۲) $\frac{1}{a+1}$ (۳) $\frac{4}{a}$ (۴) $a+2$

۱۰۸۴- اگر $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 2$ مقدار $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{4}{2}$



- ۱۰۸۵- اگر $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=a$ و $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}=2a+1$ مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$
- ۱۰۸۶- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{x-a}-\sqrt{x}=a+1$ مقدار a کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۱۰۸۷- اگر $\frac{2}{x^2+x}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ مقدار عبارت $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۱۰۸۸- اگر $\sqrt{x+1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ مقدار $\frac{2}{x-1}$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



- ۱۰۸۹- ساده شده عبارت $(\sqrt{22}+\sqrt{12}-\sqrt{10})(\sqrt{22}-\sqrt{18}+\sqrt{15})$ کدام است؟
- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $1-\sqrt{11}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $22\sqrt{6}$
- ۱۰۹۰- اگر $a=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ و $b=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ مقدار ab کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴
- ۱۰۹۱- اگر $a, b > 0$ ، $a-\frac{1}{b}=8$ و $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}=4$ مقدار a کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۹
- ۱۰۹۲- اگر $x, y > 0$ ، $x-\frac{1}{y}=12$ و $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{y}}=2$ مقدار xy کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۶
- ۱۰۹۳- اگر $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ حاصل $(a+b)^8$ چقدر است؟
- (۱) ۶ (۲) 6^2 (۳) 6^4 (۴) 6^8
- ۱۰۹۴- مقدار عبارت $\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۱۰۹۵- اگر $x=\sqrt{1+\sqrt{6}}$ حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ برحسب x کدام است؟
- (۱) $2x^2$ (۲) x (۳) $x\sqrt{2}$ (۴) x^2
- ۱۰۹۶- اگر $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{\sqrt{3}-1}$ برحسب a کدام است؟
- (۱) \sqrt{a} (۲) $2a$ (۳) $\sqrt{2a}$ (۴) $\sqrt{2a}$
- ۱۰۹۷- حاصل عبارت $(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})\sqrt{2\sqrt{2}}$ کدام است؟
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۱۶
- ۱۰۹۸- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد، ساده شده عبارت $1+\cot \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{-1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{1-\cos \alpha}$ (۳) $\frac{-1}{\sin \alpha}$ (۴) $\frac{1}{1-\sin \alpha}$

درس چهارم / بخش سوم: اتحاد مربع مجموع سه جمله

اتحاد مربع مجموع سه جمله

قرض کنید a, b, c و سه عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

این تساوی را اتحاد مربع مجموع سه جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مربع مجموع سه جمله برابر است با مجموع مربع‌های این سه جمله به علاوه دو برابر حاصل ضرب هر دو تا از آن‌ها.

مثال:

الف) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sqrt{6}$
 $= 2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{18} = 11 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{18}$

ب) $(x^2 - x + 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2x^2(-x) + 2(-x)(1) + 2x^2(1) = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + 2x^2$
 $= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

نست ۱

در عبارت $(x^2 + x - \frac{1}{2})^2$ ضریب جمله x^2 کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) ۱ (۱) صفر

$$(x^2 + x - \frac{1}{2})^2 = x^4 + x^2 + \frac{1}{4} + 2x^2 - x - x^2 = x^4 + 2x^2 - x + \frac{1}{4}$$

بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

بنابراین ضریب جمله x^2 صفر است.

را حل

نست ۲

اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ و $a+b+c=4$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۱۶ (۴) ۱۴ (۳) ۱۲ (۲) ۸ (۱)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 \Rightarrow bc+ac+ab=0$$

ابتدا توجه کنید که

پس

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \Rightarrow 4^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16$$

را حل

نست ۳

اگر $a+b=c-4$ و $ab+ac+bc=3$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

تساوی $a+b=c-4$ را به شکل $a+b+c=4$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a+b+c)^2 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

را حل

نست ۴

اگر $a^2 + 2ab = 30$ ، $b^2 - 2ac = 24$ و $c^2 - 2bc = 10$ ، مقدار $|c-a-b|$ کدام است؟

- ۸ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

تساوی‌های داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = 64 \Rightarrow (a+b-c)^2 = 64 \Rightarrow |a+b-c| = 8 \Rightarrow |c-a-b| = 8$$

را حل

اتحاد مربع مجموع سه جمله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح

کتاب درسی

۱۰۹۹- ضرب x^2 در عبارت $((x-1)^2+3)^2$ چقدر است؟

۴ (۴)	۸ (۳)	۱۲ (۲)	۱۶ (۱)
-------	-------	--------	--------

۱۱۰۰- ساده شده عبارت $A=(a+b-c)^2-2(a-b+c)^2+2(a^2+b^2+c^2)$ کدام است؟

$f(2ab-2ac+bc)$ (۴)	$f(ab-2ac+2bc)$ (۳)	$8(ab+ac-bc)$ (۲)	$8(ab-ac+bc)$ (۱)
---------------------	---------------------	-------------------	-------------------

کتاب درسی

۱۱۰۱- ساده شده عبارت $A=2(a+b+c)^2-(a+b)^2-(a+c)^2-(b+c)^2$ کدام است؟

صفر (۴)	$(a+b+c)^2$ (۳)	$ab+ac+bc$ (۲)	$2(ab+bc+ac)$ (۱)
---------	-----------------	----------------	-------------------

۱۱۰۲- اگر $x+y+z=3$ و $xy+xz+yz=2$ ، آن‌گاه مقدار $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

۷ (۴)	۶ (۳)	۵ (۲)	۴ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۱۰۳- اگر $a+b-c=7$ و $ab-ac-bc=-18$ ، حاصل عبارت $a^2+b^2+c^2$ چند است؟

۸۵ (۴)	۶۴ (۳)	۵۴ (۲)	۴۶ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۱۰۴- اگر $a^2+b^2+c^2=26$ و $a-b+c=6$ ، حاصل عبارت $ab+bc-ca$ کدام است؟

-۴ (۴)	-۵ (۳)	-۶ (۲)	-۷ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۱۰۵- اگر $a^2+b^2+c^2=62$ و $bc-ab-ac=-29$ ، حاصل عبارت $a-b-c$ کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

سطح

۱۱۰۶- اگر $a^2+2ab+b^2=3$ و $c^2+2c(a+b)=6$ ، مقدار $|a+b+c|$ کدام است؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۱۰۷- اگر $a^2+ab+ac=25$ ، $b^2+bc+ba=22$ و $c^2+ca+cb=7$ ، مقدار $|b|$ کدام است؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۱۰۸- عددهای a ، b و c مثبت‌اند. $a+2b=\frac{100}{a}$ ، $b+2c=\frac{96}{b}$ و $c+2a=\frac{92}{c}$ ، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱۸ (۴)	۱۷ (۳)	۱۶ (۲)	۱۵ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۱۰۹- اگر $a+b+c=4$ ، $a^2+b^2+c^2=17$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$ ، مقدار abc کدام است؟

-۴ (۴)	-۸ (۳)	$-\frac{1}{4}$ (۲)	$-\frac{1}{8}$ (۱)
--------	--------	--------------------	--------------------

۱۱۱۰- اگر $abc=12$ ، $a^2+b^2+c^2=26$ و $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{2}{3}$ ، مقدار $ab+bc+ca$ کدام است؟

۲۰ (۴)	۱۹ (۳)	۱۸ (۲)	۱۷ (۱)
--------	--------	--------	--------

۱۱۱۱- اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$ و $a+b+c=2abc$ ، مقدار $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ کدام است؟

۱۵ (۴)	۱۴ (۳)	۱۲ (۲)	۹ (۱)
--------	--------	--------	-------

۱۱۱۲- اگر $a=3-\sqrt{2}$ ، $b=\sqrt{2}-1$ و $c=\sqrt{2}-\sqrt{2}-2$ ، مقدار $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ کدام است؟

-۰/۵ (۴)	-۰/۵ (۳)	-۲ (۲)	۲ (۱)
----------	----------	--------	-------

درس چهارم / بخش چهارم: اتحاد جمله مشترک

اتحاد جمله مشترک

فرض کنید x, a و b عددهایی حقیقی باشند. در این صورت

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

این تساوی را اتحاد جمله مشترک می‌نامند. طبق این اتحاد، برای پیدا کردن حاصل ضرب دو برانتز که جمله‌های مشترک دارند، مربع جمله مشترک، حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک و حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک را حساب می‌کنیم و این‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به عبارت دیگر،

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک: ab
 جمله مشترک: $(a+b)x$
 مجموع جمله‌های غیرمشترک: x^2
 مربع جمله مشترک: x^2
 جمله‌های غیرمشترک: a و b
 جمله مشترک: x

مثال:

الف) $(x-a)(x-ra) = x^2 + (-a-ra)x + (-a)(-ra) = x^2 - rax + ra^2$

ب) $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = (x^2+x)^2 + (1+2)(x^2+x) + 1 \times 2 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3(x^2+x) + 2 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

نست ۱

در عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ضریب x^2 کدام است؟

- ۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

را حل

با استفاده از اتحادهای جمله مشترک و مربع مجموع دو جمله، عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = ((x^2+5x)+4)((x^2+5x)+6) \\ &= (x^2+5x)^2 + 1 \cdot (x^2+5x) + 24 = x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 1 \cdot x^2 + 5x + 24 = x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 5x + 24 \end{aligned}$$

بنابراین ضریب x^2 در این عبارت برابر ۲۶ است.

نست ۲

اگر $x^2 - 3x = 7$ ، حاصل $(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$ کدام است؟

- ۱۷ (۱) ۱۹ (۲) ۲۱ (۳) ۲۷ (۴)

را حل

ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ و $(x-3)(x+1) = x^2 - 3x - 4$. بنابراین

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) = (7+2)(7-4) = 21$$



اتحاد جمله مشترک

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

کتاب درسی

			۱۱۱۳- حاصل عبارت $(x+2)(x+4)-(x+1)(x+5)$ کدام است؟
$x-4$ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	$x-1$ (۱)
			۱۱۱۴- اگر $(x-2)(x+3)=1$ مقدار x^2+x کدام است؟
۸ (۴)	۷ (۳)	۶ (۲)	۵ (۱)
			۱۱۱۵- اگر $a-b=4$ و $ab=2$ مقدار $(1+a)(1-b)$ کدام است؟
۸ (۴)	۶ (۳)	۴ (۲)	۳ (۱)
			۱۱۱۶- اگر $a+b=ab=5$ حاصل $x^2-(x+a)(x+b)+5$ کدام است؟
$-5x$ (۴)	$x+5$ (۳)	$x-5$ (۲)	$5x$ (۱)

سطح ۲

			۱۱۱۷- اگر $x^2=5x+2$ حاصل عبارت $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$ کدام است؟
۵۶ (۴)	۴۸ (۳)	۴۲ (۲)	۳۶ (۱)
			۱۱۱۸- عبارت $A=x(x-1)(x+1)(x-2)+1$ با کدام عبارت برابر است؟
$(x^2+x+1)^2$ (۴)	$(x^2-x-1)^2$ (۳)	$(x^2+x-1)^2$ (۲)	$(x^2-x+1)^2$ (۱)
			۱۱۱۹- اگر $x=\sqrt{\sqrt{5}-1}$ مقدار عبارت $(x-1)(x-2)(x^2+3x+2)$ کدام است؟
$15-9\sqrt{5}$ (۴)	$15-7\sqrt{5}$ (۳)	$15+9\sqrt{5}$ (۲)	$15+7\sqrt{5}$ (۱)
			۱۱۲۰- مقدار عبارت $A=(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ کدام است؟
$51-\sqrt{13}$ (۴)	$51+\sqrt{13}$ (۳)	۵۱ (۲)	۵۰ (۱)

درس چهارم / بخش پنجم: اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

این تساوی را اتحاد مکعب مجموع دو جمله می‌نامند. طبق این اتحاد، مکعب مجموع دو جمله برابر است با مجموع مکعب‌های این دو جمله، سه برابر مربع جمله اول در جمله دوم و سه برابر مربع جمله دوم در جمله اول. به عبارت دیگر،

$$(a+b)^3 = a^3 + \underbrace{3a^2b}_{\substack{\text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله اول در جمله دوم} \\ \text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله دوم در جمله اول}} + \underbrace{3ab^2}_{\substack{\text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله اول در جمله دوم} \\ \text{مکعب سه برابر مربع سه برابر مربع مکعب جمله دوم در جمله اول}}} + b^3$$

به همین ترتیب، اتحاد مکعب تفاضل دو جمله به صورت زیر است:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال:

الف) $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \times 1 + 3(2x) \times 1^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

ب) $(\frac{x}{2}-2)^3 = (\frac{x}{2})^3 - 3(\frac{x}{2})^2 \times 2 + 3(\frac{x}{2}) \times 2^2 - 2^3 = \frac{x^3}{8} - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 8$

ب) $(1-\sqrt{2})^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times \sqrt{2} + 3 \times 1 \times \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 1 - 3\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$

تست

ضرب x^3 در عبارت $((x+2)^3 - 6x^2)^2$ کدام است؟

- ۴۸ (۴)
- ۲۴ (۳)
- ۱۶ (۲)
- ۸ (۱)

را حل

عبارت را با استفاده از اتحادهای مکعب مجموع دو جمله و مربع مجموع سه جمله به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} ((x+2)^3 - 6x^2)^2 &= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2)^2 = (x^3 + 12x + 8)^2 \\ &= x^6 + 144x^2 + 64 + 24x^4 + 16x^3 + 192x \end{aligned}$$

بنابراین ضرب x^3 در این عبارت برابر ۱۶ است.

تست

اگر $a^2 + b^2 = 133$ و $a^2b + ab^2 = 70$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱۰ (۴)
- ۸ (۳)
- ۷ (۲)
- ۶ (۱)

را حل

بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله، $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2) = 133 + 3 \times 70 = 243$ ، بنابراین

$$a+b = \sqrt[3]{243} = 7$$



تست
□□□□

اگر $a + \frac{27}{a} = 5$ ، مقدار عبارت $a^3 + \frac{27}{a^3}$ کدام است؟

- ۴۵ (۱) ۶۵ (۲) ۸۰ (۳) ۱۷۰ (۴)

طرفین تساوی $a + \frac{27}{a} = 5$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(a + \frac{27}{a})^3 = 125 \Rightarrow a^3 + 3a^2(\frac{27}{a}) + 3(\frac{27}{a})a + \frac{27^3}{a^3} = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a} + 9a + \frac{27}{a} = 125 \Rightarrow a^3 + \frac{27}{a} + 9(a + \frac{27}{a}) = 125$$

اگر به جای $a + \frac{27}{a}$ مقدار آن یعنی ۵ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود $a^3 + \frac{27}{a^3} + 9(5) = 125$ ، بنابراین $a^3 + \frac{27}{a^3} = 80$.

راه‌حل

تست
□□□□

حاصل $\frac{\sqrt{7+5\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱- $\sqrt{2}$ (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}-1$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

توجه کنید که $\frac{\sqrt{7+5\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7+5\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}}$. از طرف دیگر، $\sqrt{7+5\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$. بنابراین صورت و مخرج

کسر مورد نظر برابر است، یعنی حاصل کسر برابر ۱ است.

راه‌حل

نکته

اگر در اتحاد مکعب مجموع دو جمله، از دو جمله وسط $3ab$ را فاکتور بگیریم، به دست می‌آید

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

به همین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

تست
□□□□

اگر $a+b=5$ و $ab=2$ ، مقدار a^3+b^3 کدام است؟

- ۱۱۵ (۱) ۱۰۵ (۲) ۹۵ (۳) ۹۰ (۴)

بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow 5^3 = a^3 + b^3 + 3 \times 2 \times 5$$

$$a^3 + b^3 = 5^3 - 3 \times 2 \times 5 = 125 - 30 = 95$$

راه‌حل

تست
□□□□

اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ ، مقدار $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

- ± 52 (۱) ± 76 (۲) ± 46 (۳) ± 72 (۴)

ابتدا مقدار $x - \frac{1}{x}$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm 4$$

اکنون توجه کنید که $x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x})$. در نتیجه $x^3 - \frac{1}{x^3}$ برابر با ۷۶ یا -۷۶ است.

راه‌حل



تسبیح
0000

اگر $ab=4$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}=4$ مقدار $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}$ کدام است؟

- ۸۸ (۴) ۸۴ (۳) ۶۸ (۲) ۶۴ (۱)

را حل اگر دو طرف تساوی $\sqrt{a}-\sqrt{b}=4$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 = 4^3 \Rightarrow (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 - 3\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 64$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3\sqrt{ab}(4) = 64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-12(4) = 64 \Rightarrow a\sqrt{a}-b\sqrt{b} = 88$$

را حل

تسبیح
0000

اگر $\tan x - \cot x = 3$ مقدار $\tan^2 x - \cot^2 x$ کدام است؟

- ۲۶ (۴) ۳۴ (۳) ۳۱ (۲) ۲۷ (۱)

بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله.

$$(\tan x - \cot x)^3 = \tan^3 x - \cot^3 x - 3 \tan x \cot x (\tan x - \cot x) \Rightarrow 3^3 = \tan^3 x - \cot^3 x - 3 \times 1 \times 3$$

$$\tan^3 x - \cot^3 x = 27 + 9 = 36$$

را حل

تسبیح
0000

اگر $A = \sqrt{4-\sqrt{8}} + \sqrt{4+\sqrt{8}}$ مقدار $A^2 - 6A$ کدام است؟

- ۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۲ (۲) ۱۶ (۱)

ابتدا A را به توان سه می‌رسانیم و سپس از اتحاد مکعب مجموع دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$A^3 = (\sqrt{4-\sqrt{8}} + \sqrt{4+\sqrt{8}})^3 = \sqrt{4-\sqrt{8}}^3 + \sqrt{4+\sqrt{8}}^3 + 3\sqrt{4-\sqrt{8}}\sqrt{4+\sqrt{8}}(\sqrt{4-\sqrt{8}} + \sqrt{4+\sqrt{8}})$$

$$= 4\sqrt{4-\sqrt{8}} + 4\sqrt{4+\sqrt{8}} + 3\sqrt{(4-\sqrt{8})(4+\sqrt{8})} \times A = 4\sqrt{4-\sqrt{8}} + 4\sqrt{4+\sqrt{8}} + 3\sqrt{16-8}A = 4\sqrt{4-\sqrt{8}} + 4\sqrt{4+\sqrt{8}} + 6A$$

در نتیجه $A^2 - 6A = 8$.

را حل

تسبیح
0000

مقدار عبارت $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}$ به ازای $x = 45^\circ$ کدام است؟

- ۱ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

به کمک اتحادهای $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ و $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ صورت و مخرج عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

بنابراین $A = \frac{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x - 1}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 1} = \frac{-3\sin^2 x \cos^2 x}{-2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3}{2}$ پس مقدار عبارت A به ازای هر مقدار x برابر $\frac{3}{2}$ است.

را حل



اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



سطح ۱

کتاب درسی

کتاب درسی

			۱۱۲۱- ضرب x^2 در عبارت $A=(x-2)^2-(2x-1)^2$ کدام است؟
۱۲ (۴)	۸ (۳)	۶ (۲)	۴ (۱)
			۱۱۲۲- ضرب x^2 در عبارت $(x^2-2x)^2-2x^2$ کدام است؟
۱۴ (۴)	۱۲ (۳)	۱۰ (۲)	۸ (۱)
			۱۱۲۳- اگر $a^2+b^2=2$ ، مقدار $a^6+6a^2b^2+b^6$ کدام است؟
۱۲ (۴)	۸ (۳)	۶ (۲)	۴ (۱)
			۱۱۲۴- اگر $a-b=2$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}=2$ ، مقدار ab کدام است؟
۸ (۴)	۶۴ (۳)	۲۷ (۲)	۱۲۵ (۱)
			۱۱۲۵- اگر $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{4}$ و $ab=2$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
۱۴ (۴)	۱۲ (۳)	۱۰ (۲)	۸ (۱)
			۱۱۲۶- اگر $a=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، مقدار $a^2-b^2+2ab(b-a)$ کدام است؟
۴ (۴)	$\frac{1}{4}$ (۳)	۲ (۲)	$\frac{1}{2}$ (۱)
			۱۱۲۷- اگر $a^2-2a^2b=7$ و $b^2-2ab^2=7$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
۶ (۴)	۵ (۳)	۴ (۲)	۳ (۱)
			۱۱۲۸- اگر $a=\sqrt{3}+\sqrt{6}$ ، حاصل a^2-9a کدام است؟
-۸ (۴)	۱۲ (۳)	-۱۲ (۲)	۸ (۱)
			۱۱۲۹- اگر $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}$ ، حاصل x^2-3x کدام است؟
$2\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt{2}$ (۳)	۲ (۲)	۸ (۱)



سطح ۲

			۱۱۳۰- حاصل $(\sqrt{2}+1)\sqrt{1-7\sqrt{2}}$ کدام است؟
$\sqrt{2}$ (۴)	$\sqrt{6}$ (۳)	$\sqrt{3}$ (۲)	$\sqrt{2}$ (۱)
			۱۱۳۱- اگر $\frac{a^2-1}{a}=5$ ، مقدار $\frac{a^6-1}{a^2}$ کدام است؟
۱۵۰ (۴)	۱۴۰ (۳)	۱۳۰ (۲)	۱۲۵ (۱)
			۱۱۳۲- اگر $a^2+\frac{1}{a^2}=27$ و $0 < a < 1$ ، مقدار $a^2-\frac{1}{a^2}$ کدام است؟
۱۲۰ (۴)	۱۴۰ (۳)	-۱۲۰ (۲)	-۱۴۰ (۱)
			۱۱۳۳- اگر $a^2-8b^2=22$ و $a^2-ab^2=7$ ، مقدار $a-2b$ کدام است؟
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)



- ۱۱۳۴- اگر $x^T - y^T = 45$ و $x^T y = 6 + xy^T$ ، حاصل $x - y$ کدام است؟
 ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)
- ۱۱۳۵- اگر $x^T y + y^T x = 20$ و $x^T + y^T = 65$ ، مقدار xy کدام است؟
 ۱ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)
- ۱۱۳۶- اگر $a^T b - ab^T = -4\sqrt{2}$ و $a^T - b^T = -14\sqrt{2}$ ، مقدار ab کدام است؟
 ۴ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)
- ۱۱۳۷- اگر $\sqrt{a+5} - \sqrt{a-5} = 1$ ، حاصل $a^T - 25$ کدام است؟
 ۱ (۱) -27 (۲) -64 (۳) 27 (۴)
- ۱۱۳۸- اگر $(a-b)^T = va^T b - vb^T a$ ، مقدار $\frac{a^T b^T}{b a}$ چند برابر مقدار $a-b$ است؟ $(a \neq b)$
 ۱- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴)
- ۱۱۳۹- اگر $2a^T + 6ab^T = 11$ و $2b^T + 6a^T b = 5$ ، مقدار $(a-b)^T + fab$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۱۱۴۰- اگر $a^T - 5a^T b - ab^T = 135$ و $a^T - 5a^T b - ab^T = -108$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۱۱۴۱- اگر $a^T(a-b) = 275$ ، $b^T(3a-b) = 68$ و $ab = -10$ ، مقدار $a^T + b^T$ کدام است؟
 ۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴)
- ۱۱۴۲- اگر $a^T - 3ab = \frac{44}{a}$ و $b^T - 3ab = -\frac{21}{b}$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۱۱۴۳- اگر $a^T = \frac{7}{a-3b}$ و $b^T = \frac{2}{3a-b}$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۱۱۴۴- اگر $x^T(x-y) = 98 - 2xy^T$ و $y^T(y-x) = 34 - 2x^T y$ ، حاصل $x-y$ کدام است؟
 ۴ (۱) ۴ (۲) -3 (۳) ۳ (۴)
- ۱۱۴۵- عبارت $\sqrt{3+9\sqrt{12}-9\sqrt{18}}$ با کدام یک برابر است؟
 ۱ (۱) $\sqrt{6+\sqrt{9}}$ (۲) $\sqrt{9-\sqrt{6}}$ (۳) $2\sqrt{9}$ (۴)



- ۱۱۴۶- اگر $a^T + 3ab^T = 62$ و $b^T + 3a^T b = 62$ ، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟
 ۱ (۱) -5 (۲) ۵ (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$
- ۱۱۴۷- حاصل $(11+4\sqrt{7})^{\frac{T}{2}} + (11-4\sqrt{7})^{\frac{T}{2}}$ کدام است؟
 ۵۸ (۱) $38\sqrt{7}$ (۲) $24\sqrt{7}$ (۳) $32\sqrt{7}$ (۴)
- ۱۱۴۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ کدام است؟
 ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1+\sqrt{5}}{7}$



			۱۱۴۹- حاصل $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\sqrt{26+15\sqrt{3}}$ کدام است؟
$\sqrt{3}$ (۴)	$\sqrt{2}$ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۱۵۰- اگر $a^T(3-a)=124+3a$ ، مقدار a^T-1 کدام است؟
۱۷ (۴)	۱۶ (۳)	۱۵ (۲)	۱۴ (۱)
			۱۱۵۱- اگر $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=1$ و $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=5$ ، مقدار $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ کدام است؟
۶ (۴)	۴ (۳)	۳ (۲)	۲ (۱)
			۱۱۵۲- اگر $ab=1$ و $a^T+b^T=\sqrt{6}$ ، مقدار $a^{12}+b^{12}$ کدام است؟
۹۶ (۴)	۹۴ (۳)	۵۴ (۲)	۵۲ (۱)
			۱۱۵۳- اگر $a-1=\sqrt{6a-1}$ و $a \neq 0$ ، مقدار $a-\frac{3}{a}$ کدام است؟
۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
			۱۱۵۴- اگر $\tan x + \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^T x + \cot^T x$ کدام است؟
۳۰ (۴)	۲۷ (۳)	۱۸ (۲)	۱۵ (۱)
			۱۱۵۵- حاصل $2(\sin^6 25^\circ + \cos^6 25^\circ) - 3(\sin^T 25^\circ + \cos^T 25^\circ)$ کدام است؟
-۲ (۴)	۲ (۳)	۱ (۲)	-۱ (۱)

درس چهارم / بخش ششم: اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبهای دو جمله (جاق و لاغر)

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبهای دو جمله (جاق و لاغر)

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

این تساوی را اتحاد مجموع مکعبهای دو جمله می‌نامیم. طبق این اتحاد، مجموع مکعبهای دو جمله برابر است با حاصل ضرب دو برانتز که اولی مجموع این دو جمله است و معمولاً آن را برانتز لاغر می‌نامند و دومی مجموع مربعهای دو جمله منتهای حاصل ضرب آنها است و معمولاً آن را برانتز جاق می‌نامند. به این ترتیب، این اتحاد را معمولاً اتحاد جاق و لاغر می‌نامند. توجه کنید که

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

حاصل ضرب دو جمله
مجموع مربعهای دو جمله
مجموع دو جمله
مجموع مکعبهای دو جمله

به همین ترتیب، اتحاد تفاضل مکعبهای دو جمله به صورت زیر است:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

الف) $(a+2)(a^2 - 2a + 4) = a^3 + 2^3 = a^3 + 8$

مثال:

ب) $(2a-1)(2a^2 + 2a + 1) = (2a)^3 - 1^3 = 8a^3 - 1$

نست

اگر $a = \sqrt[3]{4}$ و $b = \sqrt[3]{9}$. حاصل عبارت $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt[3]{6}$ ۴) ۱۳

بنابر اتحاد جاق و لاغر.

را حل

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{ab}) = \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3}} + \sqrt{\sqrt[3]{9^3}} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

نست

ساده شده عبارت $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ کدام است؟

- ۱) $x^6 - 1$ ۲) $x^6 - 2x^2 - 1$ ۳) $x^6 - x^2 - x^2 + 1$ ۴) $x^6 - x^2 + x^2 - 1$

با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد جاق و لاغر عبارت را ساده می‌کنیم:

را حل

$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x-1)(x+1)(x+1)(x^2 - x + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$$

نست

اگر $\frac{a-1}{a^2 - a + 1} - \frac{a+1}{a^2 + a + 1} = \frac{y}{9}$. مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم. سپس سمت چپ تساوی داده شده را با استفاده از اتحاد جاق و لاغر ساده می‌کنیم:

را حل

$$\frac{a-1}{a^2 - a + 1} - \frac{a+1}{a^2 + a + 1} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{a-1}{a^2 - a + 1} \times \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a + 1} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{y}{9}$$

$$\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1} = \frac{y}{9} \Rightarrow 9a^3 - 9 = ya^3 + y \Rightarrow 2a^3 = 16 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$



تست
□□□□

اگر $a = \sqrt[3]{17}$ ، مقدار $(a-3)^2(a^2+3a+9)^2$ کدام است؟

- ۶۴ (۱) ۸۱ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۵ (۴)

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد جاق و لاغر: $(a-3)(a^2+3a+9) = a^3 - 3^3 = 17 - 27 = -10$. بنابراین

$$(a-3)^2(a^2+3a+9)^2 = (-10)^2 = 100$$

تست
□□□□

اگر $a-b=12$ ، مقدار a^3-b^3-36ab چقدر است؟

- ۱۷۲۴ (۱) ۱۷۲۶ (۲) ۱۷۲۸ (۳) ۱۷۳۰ (۴)

راه‌حل

با استفاده از اتحاد جاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - 36ab &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) - 36ab = 12(a^2 + ab + b^2) - 36ab \\ &= 12(a^2 - 2ab + b^2) = 12(a-b)^2 = 12 \times 12^2 = 1728 \end{aligned}$$

تست
□□□□

اگر $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = -\frac{3}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2x+1}$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

راه‌حل

فرض کنید $a = \sqrt{x-1}$ و $b = \sqrt{x+1}$. می‌خواهیم مقدار عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{(x+1)^2} = a^2 + ab + b^2$$

طبق فرض مسئله $a-b = -\frac{3}{2}$. بنابراین

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = -\frac{3}{2}A \Rightarrow a^3 - b^3 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = \frac{a^3 - b^3}{-\frac{3}{2}} = \frac{x-1 - (x+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

تکنه

انحادهای جاق و لاغر را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$a^2 + b^2 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab), \quad a^3 - b^3 = (a-b)((a-b)^2 + 3ab)$$

تست
□□□□

اگر $a+b=2$ و $a^2+b^2=38$ ، مقدار ab کدام است؟

- ۵ (۱) ۵ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴)

راه‌حل

توجه کنید که بنابر اتحاد جاق و لاغر،

$$a^2 + b^2 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) \Rightarrow 38 = (2)(4 - 3ab) \Rightarrow 19 = 4 - 3ab \Rightarrow 3ab = -15 \Rightarrow ab = -5$$



اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبهای دو جمله (چاق و لاغر)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



کتاب درسی

$8x^2 - xy^2$ (۴)

$-\sqrt{3}$ (۴)

۲۶ (۴)

۸۵ (۴)

$3-\sqrt{10}$ (۴)

۱ (۴)

$\sqrt{2}+2$ (۴)

$2+2\sqrt{2}$ (۴)

۱۰ (۴)

۲۸ (۴)

-۲۸ (۴)

۷۸ (۴)

۱۱۰۰ (۴)

$8x^2 - y^2$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲۰ (۳)

۷۴ (۳)

$2-\sqrt{10}$ (۳)

۴ (۳)

$\sqrt{2}+1$ (۳)

$2+2\sqrt{2}$ (۳)

۹ (۳)

۲۷ (۳)

-۲۴ (۳)

۷۶ (۳)

۱۰۰۱ (۳)

$8x^2 - x^2y$ (۲)

-۳ (۲)

۱۸ (۲)

۶۵ (۲)

$1-\sqrt{10}$ (۲)

۹ (۲)

$\sqrt{2}-2$ (۲)

۴ (۲)

۸ (۲)

۲۶ (۲)

-۲۱ (۲)

۷۴ (۲)

۴۵۹ (۲)

$8x^2$ (۱)

۳ (۱)

۱۲ (۱)

۵۶ (۱)

۱۰ (۱)

۱۶ (۱)

$\sqrt{2}-1$ (۱)

$2\sqrt{2}$ (۱)

۷ (۱)

۲۳ (۱)

-۱۸ (۱)

۷۲ (۱)

۴۹۵ (۱)

۱۱۵۶- حاصل $(fx^2 + 6xy + 9y^2) + (2x - 3y)(27y^2 + (2x - 3y)(fx^2 + 6xy + 9y^2))$ کدام است؟

۱۱۵۷- اگر $(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3) = 27 - 3\sqrt{3}$ مقدار x کدام است؟

۱۱۵۸- اگر $a - b = 2$ و $ab = 3$ حاصل $a^2 - b^2$ کدام است؟

۱۱۵۹- اگر $a - b = 5$ و $a^2 + b^2 = 17$ مقدار $a^2 - b^2$ کدام است؟

۱۱۶۰- اگر a و b عددهایی مثبت باشند. $ab = 1$ و $a^2 + b^2 = 2$ مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

۱۱۶۱- مقدار عبارت $\frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{9} - \sqrt{6} + \sqrt{4}}$ کدام است؟

۱۱۶۲- حاصل عبارت $A = \frac{1 - a^6}{(a - \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a} + 1)}$ به ازای $a = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

۱۱۶۳- اگر $a^2 = 2$ حاصل $\frac{1}{a^2 + a + 1}$ کدام است؟



۱۱۶۴- مقدار عبارت $A = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ به ازای $x = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ کدام است؟

۱۱۶۵- a و b عددهایی مثبت‌اند و $a^2 + b^2 = 2ab(a + b)$ مقدار $a^2b^{-2} + a^{-2}b^2$ کدام است؟

۱۱۶۶- اگر $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 3$ و $ab = 9$ مقدار $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ کدام است؟

۱۱۶۷- اگر a و b عددهایی منفی باشند. $ab = 1$ و $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 7$ مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

۱۱۶۸- اگر $a > 1$ و $a^2 + \frac{1}{a^2} = 18$ مقدار $a^2 - \frac{1}{a^2}$ کدام است؟

۱۱۶۹- اگر $ab = 1$ و $a^2b + ab^2 + a + b = 99$ مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟



۱۱۷۰- اگر $ab=3$ و $\frac{a^r-b^r}{a^r b-ab^r}=15$ ، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۱۷۱- اگر $a^r+b^r=12$ و $a^r-ab+b^r=6$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۱۱۷۲- اگر $a+b=18$ و $a^r-b^r=1-(a^r+ab+b^r)$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۵۸

۱۱۷۳- a و b عددهایی حقیقی و متمایزند، $a^r=2-5b$ و $b^r=2-5a$ ، مقدار a^r+ab+b^r کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۷۴- اگر $a^6-b^6=63$ و $a^r+a^r b^r+b^r=21$ ، مقدار $|ab|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۷۵- اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ و $\frac{a}{b^r}+\frac{b}{a^r}=18$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۷۶- اگر $a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ و $b=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ، مقدار $\frac{a}{b^r}+\frac{b}{a^r}$ کدام است؟

- (۱) ۹۶۰ (۲) ۹۷۰ (۳) ۹۸۰ (۴) ۹۹۰

۱۱۷۷- اگر $a=\sqrt{18}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ و $b=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) -۲ (۳) $-2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

۱۱۷۸- اگر $a=\sqrt{9}+\sqrt{25}-\sqrt{15}$ ، حاصل $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{a}$ (۲) $\frac{a}{4}$ (۳) $\frac{a}{8}$ (۴) $\frac{8}{a}$

۱۱۷۹- اگر $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=\frac{3}{2}$ ، مقدار $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-4x+4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{8}{3}$

۱۱۸۰- اگر $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=6$ ، مقدار عبارت $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{x^2-4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$



۱۱۸۱- اگر $a+b=1$ و $a^r+b^r=5$ ، مقدار a^0+b^0 کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۲۵ (۴) ۳۱

۱۱۸۲- اگر $\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\sqrt{3}$ ، مقدار $a^r+\frac{1}{a^r}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۱۵

۱۱۸۳- اگر $a^r-6a+1=0$ ، مقدار $a^r+\frac{1}{a^r}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۹۸ (۴) ۲۱۶

۱۱۸۴- a و b عددهایی حقیقی و متمایزند و $\frac{a^r}{b}-\frac{b^r}{a}=b-a$ ، مقدار $\frac{a+b}{b}-\frac{a}{a}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۱۸۵- اگر $a^r-a-1=0$ ، مقدار $\frac{a^r-2}{a^r-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

درس چهارم / بخش هفتم: تجزیه

اگر یک چند جمله‌ای را به شکل حاصل ضرب چند چند جمله‌ای دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن را تجزیه کرده‌ایم.

روش‌های تجزیه

فاکتورگیری

در این روش از عامل‌های مشترک جمله‌ها فاکتور می‌گیریم.

مثال:

الف) $2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$

ب) $(x-1)(x+1) + (3x-3)(x+2) = (x-1)(x+1) + 3(x-1)(x+2) = (x-1)(x+1+3(x+2)) = (x-1)(4x+7)$

استفاده از اتحادها

در این روش عبارت‌ها را با استفاده از اتحادها به صورت ضرب چند عامل می‌نویسیم:

مثال:

الف) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 \xrightarrow{\text{مربع مجموع دو جمله}} (2x+1)^2$

ب) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (3x-2y)(3x+2y)$

ب) $8a^2 - 27 = (2a)^2 - 3^3 \xrightarrow{\text{جاق و لاغر}} (2a-3)((2a)^2 + (2a) \times 3 + 3^2) = (2a-3)(4a^2 + 6a + 9)$

ت) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2+4)x + 2 \times 4 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+2)(x+4)$

ت) $x^6 - 1 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x^2 - 1)(x^4 + 1) \xrightarrow{\text{جاق و لاغر}} (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

دسته‌بندی

در این روش جمله‌ها را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که بتوانیم با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها عبارت مورد نظر را تجزیه کنیم.

مثال:

الف) $xy + yz - y^2 - xz = (xy - xz) + (yz - y^2) = x(y - z) + y(z - y) = x(y - z) - y(y - z) = (y - z)(x - y)$

ب) $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x+1)^2 - y^2 = (x+1-y)(x+1+y)$

شکستن جمله‌ها

در این روش یک یا چند جمله را به صورت مجموع یا تفاضل دو یا چند جمله می‌نویسیم و سپس تجزیه را انجام می‌دهیم.

مثال:

الف) $x^2 + 3x - 4 = x^2 + 3x - 1 - 3 = (x^2 - 1) + (3x - 3) = (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)$

$= (x-1)(x^2 + x + 1 + 3) = (x-1)(x^2 + x + 4)$

ب) $fab - 3a^2 - b^2 = fab - 3a^2 + a^2 - b^2 = a^2 - (3a^2 - fab + b^2) = a^2 - (a-b)^2$

$= (a - (a-b))(a + (a-b)) = (a - 2a + b)(a + 2a - b) = (b-a)(3a-b)$

ب) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^2 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$



افزافه و کم کردن جمله‌ها

در این روش جمله‌هایی را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم تجزیه را انجام دهیم.

مثال: الف) $x^2 + 4 = x^2 - 4x + 4x + 4 = (x^2 + 4x + 4) - 4x = (x+2)^2 - 4x = (x+2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

ب) $x^2 + 4x - 8x + 4 = x^2 + 4x + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 + 4x + 4 + 4x^2 - 4x - 8x$
 $= (x^2)^2 + (2x)^2 + (-2)^2 + 2(x^2)(2x) + 2(x^2)(-2) + 2(2x)(-2) = (x^2 + 2x - 2)^2$

توجه

گاهی لازم است که برای تجزیه کردن از چند روش استفاده کنیم.

مثال: الف) $x^2 - 4x = x^2(x-4) = x^2(x-2)(x+2)$

ب) $x^2 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$

ب) $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x(x+3))((x+1)(x+2)) + 1 = (x^2 + 3x)((x^2 + 3x) + 2) + 1$
 $= (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = ((x^2 + 3x) + 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2$

تست

کدام گزینه عاملی از $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$ است؟

- (۱) $x+y+z$ (۲) $x+y-z$ (۳) $x-y+z$ (۴) $x-y$

را حل کنید که

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy - z^2 = (x-y)^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z)$$

بنابراین در تجزیه عبارت عامل $x-y+z$ وجود دارد.

تست

کدام یک از عبارت‌های زیر عامل $x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7$ است؟

- (۱) $x+y+1$ (۲) $x+y-1$ (۳) $x+y+7$ (۴) $x-y+7$

می‌توان نوشت

$$x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7 = (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 8y + 16) = (x-3)^2 - (y+4)^2$$

$$= (x-3 - (y+4))(x-3 + y+4) = (x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

تست

در تجزیه عبارت $3a^2 - 7ab + 2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $3a+b$ (۲) $a+2b$ (۳) $a-2b$ (۴) $3a-b$

عبارت را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$3a^2 - 7ab + 2b^2 = 3a^2 - ab - 6ab + 2b^2 = a(3a-b) - 2b(3a-b) = (3a-b)(a-2b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت عامل $3a-b$ وجود دارد.



تست ۴

عبارت $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ را به صورت $(x+a)(x^2+bx+1)(x^2-bx+c)$ تجزیه می‌کنیم. مقدار $a-b^2+c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۲

راهنما

عبارت را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$(x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1)$$

اگر در برانتز اول از x^3 فاکتور بگیریم، به عبارت روبه‌رو می‌رسیم

$$x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

حالا با فاکتورگیری از $x^2 + x + 1$ نتیجه می‌شود:

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

بنابراین $a=1$ ، $b=\pm 1$ و $c=1$ و در نتیجه $a-b^2+c=1$.

نکته

اگر مقدار یک چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر شود، در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود دارد.

مثال: در تجزیه عبارت $x^2 + x - 2$ عامل $x-1$ وجود دارد، زیرا مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=1$ برابر صفر است:

$$1^2 + 1 - 2 = 0$$

نکته

- اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر است.
- اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $ax+b$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=-\frac{b}{a}$ برابر صفر است.

مثال: الف) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $x^5 + x^3 + x + 1$ عامل $x+1$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=-1$ برابر صفر است:

$$(-1)^5 + (-1)^3 + (-1) + 1 = 0$$

پس در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر عامل $x+1$ وجود دارد.

ب) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $x^5 + 5x^2 - 3$ عامل $x-2$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=2$ برابر صفر نیست:

$$2^5 + 5 \times 2^2 - 3 = 112 \neq 0$$

پس در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $x-2$ وجود ندارد.

پ) می‌خواهیم بدانیم در تجزیه چندجمله‌ای $8x^4 - 4x^2 - x + 1$ عامل $2x-1$ وجود دارد یا خیر. توجه کنید که مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=\frac{1}{2}$ برابر صفر است:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

پس در تجزیه این چندجمله‌ای عامل $2x-1$ وجود دارد.

تست ۵

کدام یک از عبارتهای زیر عامل $x^3 - 5x^2 + 4$ نیست؟

- ۱ (۱) $x-3$ ۲ (۲) $x-2$ ۳ (۳) $x-1$ ۴ (۴) $x+1$

راهنما

راهنما اول می‌توان نوشت $x^3 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$. بنابراین $x-3$ عامل $x^3 - 5x^2 + 4$ نیست.

راهنما دوم گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x-a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x=a$ برابر صفر می‌شود.

گزینه (۱) مقدار چندجمله‌ای مورد نظر به ازای $x=3$ برابر است با $3^3 - 5 \times 3^2 + 4 = 4 \neq 0$. پس عامل $x-3$ در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر وجود ندارد.

از طرف دیگر، عامل‌های $x-2$ ، $x-1$ و $x+1$ در تجزیه عبارت مورد نظر وجود دارند. زیرا مقدار این عبارت به ازای $x=2$ ، $x=1$ و $x=-1$ برابر صفر می‌شود.



تست
□□□□

کدام عامل در تجزیه عبارت $A = x^3 - 13x^2 + 10x + 24$ وجود ندارد؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $x + 1$ (۳) $x - 12$ (۴) $x + 2$

راهنما

راهنما اول عبارت را به شکل $(x^2 - 8) - 13x(x - 2) - 16(x - 2) = x^2 - 8 - 13x^2 + 26x - 16x + 32 = x^2 - 12x + 24 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ می‌نویسیم. حال به کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 13x(x - 2) - 16(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 13x - 16) = (x - 2)(x^2 - 11x - 12)$$

و به کمک اتحاد جمله مشترک، برانتز دوم را هم تجزیه می‌کنیم: $A = (x - 2)(x - 12)(x + 1)$

راهنما دوم گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که اگر در تجزیه یک چندجمله‌ای عامل $x - a$ وجود داشته باشد، مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x = a$ برابر صفر می‌شود.

گزینه (۴): مقدار چندجمله‌ای مورد نظر به ازای $x = -2$ برابر است با $(-2)^3 - 13(-2)^2 + 10(-2) + 24 = -8 - 52 - 20 + 24 = -56$. پس عامل $x + 2$ در تجزیه چندجمله‌ای مورد نظر وجود ندارد.

از طرف دیگر، عامل‌های $x - 2$ ، $x + 1$ و $x - 12$ در تجزیه عبارت مورد نظر وجود دارند، زیرا مقدار این عبارت به ازای $x = 2$ ، $x = -1$ و $x = 12$ برابر صفر می‌شود.

تست
□□□□

عدد $53^6 - 1$ بر کدام عدد بخش‌پذیر نیست؟

- (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۵۲ (۴) ۵۴

راهنما

به کمک اتحاد مزدوج می‌توانیم عدد $53^6 - 1$ را به صورت $A = (53^3 - 1)(53^3 + 1)$ بنویسیم. به کمک اتحاد چاق و لاغر، هر یک از برانتزها را تجزیه می‌کنیم. بنابراین $A = (53^3 - 1)(53^3 + 1) = (53 - 1)(53^2 + 53 + 1)(53 + 1)(53^2 - 53 + 1) = 52 \times 2863 \times 54 \times 2757$

بخش‌پذیر است. از طرف دیگر ۲۷۵۷ و ۵۴ بر ۳ بخش‌پذیر هستند. پس A بر ۹ بخش‌پذیر است. ولی هیچ‌یک از اعداد ۵۴، ۵۲، ۲۸۶۳ و ۲۷۵۷ بر ۵ بخش‌پذیر نیستند، پس A بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

استفاده از تجزیه در محاسبات

گاهی لازم است برای محاسبه مقدار یک عبارت، ابتدا آن را تجزیه کنیم.

تست
□□□□

اگر $a + b = 3$ و $b + c = 5$ ، حاصل عبارت $a^2 + ab + bc + ca$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

راهنما

با توجه به اتحاد جمله مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: $a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b + c) + bc = (a + b)(a + c)$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3 \times 5 = 15$.

تست
□□□□

حاصل عبارت $(a - 4)^3 + 3(a - 4)^2 + 3(a - 4) + 1$ به ازای $a = \frac{7}{3}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{27}{4}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $-\frac{A}{27}$ (۴) $\frac{A}{27}$

راهنما

اگر فرض کنیم $a - 4 = x$ ، آن‌گاه

$$(a - 4)^3 + 3(a - 4)^2 + 3(a - 4) + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = (a - 4 + 1)^3 = (a - 3)^3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر به ازای $a = \frac{7}{3}$ برابر است با $(\frac{7}{3} - 3)^3 = (-\frac{2}{3})^3 = -\frac{8}{27}$.

تست
□□□□

اگر $\alpha = \sqrt{3}\sqrt{2} - 4$ و $\beta = \sqrt{3}\sqrt{2} + 4$ ، حاصل عبارت $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۸ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $-6\sqrt{2}$

راهنما

ابتدا به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^6 - \beta^6$$

بنابراین مقدار این عبارت برابر است با $(3\sqrt{2} - 4)^6 - (3\sqrt{2} + 4)^6 = -8$.



تجزیه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



سطح

کتاب درسی

$3x-2$ (۴)

$2x-3$ (۳)

۱۱۸۶- در تجزیه عبارت $6x^2+7x-3$ کدام عامل وجود دارد؟

$3x-1$ (۲)

$3x+1$ (۱)

کتاب درسی

x^2+2 (۴)

x^2+4 (۳)

۱۱۸۷- در تجزیه عبارت x^5-16x کدام عامل وجود ندارد؟

$x+2$ (۲)

$x-2$ (۱)

کتاب درسی

$4x^2-12x+9$ (۴)

$4x^2-6x+9$ (۳)

۱۱۸۸- کدام عبارت در تجزیه $8x^2+27$ وجود دارد؟

$4x^2+6x+9$ (۲)

$2x-3$ (۱)

کتاب درسی

x^2+1 (۴)

x^2+x-1 (۳)

۱۱۸۹- در تجزیه عبارت x^6-1 کدام عامل وجود دارد؟

x^2-x-1 (۲)

x^2-x+1 (۱)

کتاب درسی

$a+b$ (۴)

$a-2b$ (۳)

۱۱۹۰- در تجزیه عبارت $2a^2-2ab-2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

$2a-b$ (۲)

$a+2b$ (۱)

۱۱۹۱- کدام گزینه عاملی از $x^2-2x+4y-y^2-3$ است؟

$x-y-3$ (۴)

$x+y+3$ (۳)

$x-y-1$ (۲)

$x-y+1$ (۱)

۱۱۹۲- کدام یک از عبارت‌های زیر عامل $(x^2-x)^2-\lambda(x^2-x)+12$ نیست؟

$x-2$ (۴)

$x+2$ (۳)

$x-3$ (۲)

$x+3$ (۱)

۱۱۹۳- کدام گزینه عاملی از x^2-x^2+9x-9 است؟

x^2+9 (۴)

x^2+4 (۳)

x^2+3 (۲)

x^2+2 (۱)

۱۱۹۴- در تجزیه عبارت $2a^2-2ab^2-2a^2b+2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

$2a-2b$ (۴)

$2a-b$ (۳)

$a-2b$ (۲)

$2a-2b$ (۱)

۱۱۹۵- عدد 169^4-171^4 بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۸ (۲)



سطح

۱۱۹۶- کدام گزینه عاملی از x^4-x^2-6x-9 است؟

x^2+x+3 (۴)

x^2+2x+3 (۳)

x^2+x-3 (۲)

x^2-2x+3 (۱)

۱۱۹۷- کدام گزینه عاملی از x^4+3x^2+4 است؟

x^2+x+1 (۴)

x^2-x+2 (۳)

x^2-x-2 (۲)

x^2+x-2 (۱)

۱۱۹۸- کدام گزینه عاملی از x^4-x^2+16 است؟

x^2+3x+4 (۴)

x^2+3x-4 (۳)

x^2+2x-4 (۲)

x^2+2x+4 (۱)



۱۱۹۹- کدام گزینه عاملی از $9x^2 + 11x^2 + 4$ است؟

- (۱) $3x^2 + x + 2$ (۲) $3x^2 + x - 2$ (۳) $3x^2 - x - 1$ (۴) $3x^2 + x + 1$

۱۲۰۰- عبارت $x^2 - 3x^2 - x + 3$ را به صورت $(x+a)(x+b)(x+c)$ تجزیه می‌کنیم که در آن $a < b < c$. مقدار $a - b + c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲۰۱- در تجزیه عبارت $2x^2 + x^2 - 5x + 2$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $2x - 1$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x + 2$ (۴) $x - 1$

۱۲۰۲- در تجزیه عبارت $6x^2 - x^2 - 5x + 2$ کدام عبارت وجود ندارد؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $3x - 2$ (۴) $x + 1$

۱۲۰۳- کدام عامل در تجزیه عبارت $2x^2 + 8xy + 8y^2 + x + 2y - 1$ وجود دارد؟

- (۱) $x + 2y - 1$ (۲) $x + 2y + 1$ (۳) $2x + y + 1$ (۴) $2x + y - 1$

۱۲۰۴- در تجزیه عبارت $A = x^2 + y^2 + x^2y^2$ کدام عبارت وجود دارد؟

- (۱) $x^2 - y^2 + xy$ (۲) $x^2 - y^2 - xy$ (۳) $x^2 + y^2 - xy$ (۴) $x^2 + y^2$

۱۲۰۵- کدام گزینه عاملی از $x^2 + y^2 - 7x^2y^2$ است؟

- (۱) $x^2 - y^2 - xy$ (۲) $x^2 - y^2 + 3xy$ (۳) $x^2 + y^2 - 3xy$ (۴) $x^2 - y^2 + xy$

۱۲۰۶- کدام عامل در تجزیه عبارت $x^2 - 7x^2y^2 + 9y^2$ وجود دارد؟

- (۱) $x^2 - xy + y^2$ (۲) $x^2 + 2xy + 2y^2$ (۳) $x^2 + 3xy + 3y^2$ (۴) $x^2 - xy - 2y^2$

۱۲۰۷- کدام گزینه عاملی از عبارت $a^2 - 8a^2b^2 + 9b^2$ است؟

- (۱) $a^2 + ab\sqrt{2} + b^2$ (۲) $a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2$ (۳) $a^2 - ab\sqrt{2} - 2b^2$ (۴) $a^2 + 2b^2 + ab\sqrt{2}$

۱۲۰۸- کدام عامل در تجزیه عبارت $x^2 - y^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{64}$ وجود دارد؟

- (۱) $x + y + \frac{3}{8}$ (۲) $x - y + \frac{1}{8}$ (۳) $x - y - \frac{1}{4}$ (۴) $x + y - \frac{3}{16}$

۱۲۰۹- عبارت $x^0 - x^2 + x^2 - x^2 + x - 1$ را به صورت $(x+a)(x^2+bx+1)(x^2-bx+c)$ تجزیه کرده‌ایم. مقدار $2a - b^2 + c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲۱۰- مقدار عبارت $(x-5)^2 + 2(x-5) + 2(x-5) + 1$ به ازای $x = \frac{10}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{27}{3}$ (۴) $-\frac{8}{27}$

۱۲۱۱- اگر $a = \sqrt{5} + 2$. مقدار $a^2 - 6a^2 + 12a + 18$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۵ (۳) ۳۱ (۴) ۳۷

۱۲۱۲- اگر $a + b = 4$ و $b + c = 6$. مقدار عبارت $\frac{b^2 + ab + bc + ca}{c^2 + bc - ab - ac}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۱۳- اگر $x - y = 2$ و $y - z = 4$. حاصل عبارت $xy - y^2 - xz + yz + x - z$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶



۱۲۱۴- اگر $ab=1$ و $a-b=76$ ، مقدار $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۲۱۵- حاصل عبارت $A=\sqrt{6+2\sqrt{6+2\sqrt{2+2\sqrt{3}}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴)

۱۲۱۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos^2 \alpha \sin \alpha} - \tan \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\cos \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) ۱ (۴)

۱۲۱۷- اگر $\frac{\tan^2 x - \cot^2 x}{\tan x - \cot x} = 5$ ، حاصل عبارت $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۲۱۸- اگر $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

- ۲۲ (۱) $\frac{23}{27}$ (۲) $\frac{24}{27}$ (۳) $\frac{25}{27}$ (۴)

فصل سوم

درس چهارم / بخش هشتم: ساده کردن عبارتها

روش‌های ساده کردن عبارتها

ضرب و تقسیم کسرها

ابتدا صورت و مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم، سپس عبارتهای مشترک را ساده می‌کنیم.

الف)
$$\frac{x^2-1}{x+2} \times \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \times \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x+2}$$

مثال:

ب)
$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} \times \frac{x^2-9}{x^2+x} = \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} \times \frac{x^2+x}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x-3}$$

جمع و تفریق کسرها

ابتدا مخرج‌ها را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم، سپس با استفاده از مخرج مشترک گرفتن عبارات را ساده می‌کنیم.

الف)
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

مثال:

ب)
$$\frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{1-x}{x^2-4x-5} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{1-x}{(x+1)(x-5)} = \frac{x(x-5)+(1-x)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-5x+x+2-x^2-2x}{(x+1)(x+2)(x-5)} = \frac{-6x+2}{(x+1)(x+2)(x-5)} = \frac{2(1-3x)}{(x+1)(x+1)(x-5)}$$

تست ۱

حاصل عبارت $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} \times \frac{3x-1}{x-1}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۱+x (۲)

۱+۳x (۱)

ابتدا توجه کنید که

$$3x^2+2x-1 = (x^2-1) + (2x^2+2x) = (x-1)(x+1) + 2x(x+1) = (x+1)(x-1+2x) = (x+1)(3x-1)$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} \times \frac{3x-1}{x-1} = \frac{(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{3x-1}{3x-1} = 1$

را حل

تست ۲

ساده شده عبارت $\frac{2x^2+1-xy}{x^2+3xy-1-y^2} \times \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy}$ کدام است؟

۲ (۴)

۲x (۳)

x+2y (۲)

x-2y (۱)

توجه کنید که

$$2x^2+1-xy = 2x(x+\frac{1}{2}y), \quad x^2-4y^2 = (x-2y)(x+2y), \quad x^2+2xy = x(x+2y)$$

$$x^2+3xy-1-y^2 = x^2+5xy-2xy-1-y^2 = x(x+5y)-2y(x+5y) = (x+5y)(x-2y)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{2x^2+1-xy}{x^2+3xy-1-y^2} \times \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy} = \frac{2x(x+\frac{1}{2}y)}{(x+5y)(x-2y)} \times \frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x+2y)} = 2$$

را حل



تست

مقدار $\frac{999^3+1}{999^2-998}$ کدام است؟

- ۹۹۸ (۱) ۹۹۹ (۲) ۱۰۰۰ (۳) ۱۰۰۱ (۴)

را حل

بنابر اتحاد جاق ولاغر، $(999^3 - 998) = 1000 - (999^2 - 998) = 1000 - (999 + 998) = 999 + 1$. بنابراین $\frac{999^3 + 1}{999^2 - 998} = 1000$.

تست

اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{5}$ ، مقدار $\frac{a^6 - 1}{a^2 - a^2}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴)

را حل

می توان نوشت

$$\frac{a^6 - 1}{a^2 - a^2} = \frac{(a^2)^3 - 1}{a^2(a^2 - 1)} = \frac{(a^2 - 1)((a^2)^2 + a^2 + 1)}{a^2(a^2 - 1)} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 + 1 = \sqrt{5}^2 + 3 = 8.$$

دامنه تعریف عبارت‌های گویا

یک عبارت گویا به ازای مقادیری از x که یکی از مخرج‌ها را صفر می‌کنند، تعریف نمی‌شود.

مثال: عبارت گویای $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ به ازای $x=0$ و $x=1$ تعریف نمی‌شود.

سدا کردن دامنه تعریف عبارت‌های گویا

برای پیدا کردن مقادیری از x که به ازای آن‌ها یک عبارت گویا تعریف نمی‌شود، مخرج‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله‌های حاصل را حل می‌کنیم.

تست

عبارت گویای $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+1}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

را حل

عبارت‌های x ، $x+1$ و $\frac{x-2}{x+1}$ در مخرج کسرها قرار دارند. هر یک از این‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله‌ها را حل می‌کنیم:

$$x = 0, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad \frac{x-2}{x+1}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

بنابراین عبارت گویای مورد نظر به ازای سه مقدار صفر، -1 و 2 برای x تعریف نمی‌شود.



ساده کردن عبارت‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱۲۱۹- اگر $a = \sqrt[3]{2} - 1$ مقدار $\frac{a^3 + 1}{a^3 - a + 1}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) 8 (۴) $2\sqrt[3]{4}$

۱۲۲۰- اگر $a = 3^{\frac{1}{2}} + 1$ حاصل عبارت $\frac{(3^{\frac{1}{2}} - 1)(3^{\frac{1}{2}} + 1)}{(3^{\frac{1}{2}} - 1)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{a}$ (۲) $-a$ (۳) $\frac{1}{a}$ (۴) a

۱۲۲۱- اگر $a = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ مقدار $\frac{a^6 - 1}{a^2(a^2 + 1) + 1}$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{2}$ (۲) $1 - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

۱۲۲۲- اگر $a - b = 3$ و $a^2 - b^2 = 9$ مقدار $|a^2 + ab^2 + a^2b + b^2|$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۱۲۲۳- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + 27}{x^2 - 2x - 3} \times \frac{(x-3)(x^2-1)}{x^2 - 3x + 9}$ کدام است؟

- (۱) $(x+1)(x-3)$ (۲) $(x-1)(x+3)$ (۳) $(x-1)(x-3)$ (۴) $(x-2)(x-3)$

۱۲۲۴- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ کدام است؟

- (۱) $x + 2$ (۲) $x + 3$ (۳) $x - 2$ (۴) $x - 3$

۱۲۲۵- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x} - \frac{x - x^2}{x}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-x$ (۳) $-\frac{1}{x}$ (۴) x

۱۲۲۶- حاصل عبارت $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 5x - 6} \times \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 6x + 5}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{6-x}{6+x}$ (۳) $\frac{x-6}{x-1}$ (۴) $\frac{5+x}{5-x}$

۱۲۲۷- حاصل عبارت $\frac{a(b+c) + c(b-a)}{a^2 + ab + bc + ca}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{a+b}$ (۲) $\frac{b}{a+b}$ (۳) $\frac{c}{a+c}$ (۴) $\frac{b}{b+c}$

۱۲۲۸- ساده شده عبارت $\frac{x^2 - 11xy + 30y^2}{x^2 - 9xy + 20y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x+6y}{x+4y}$ (۲) $\frac{x-6y}{x-4y}$ (۳) $\frac{x-5y}{x-4y}$ (۴) $\frac{x-4y}{x-5y}$



۱۲۲۹- حاصل عبارت $\frac{ab^r+a^r b^r}{a^r b-ab^r}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{b}{a-b}$ (۲) $\frac{a}{a-b}$ (۳) $\frac{1}{a-b}$ (۴) $\frac{b}{a+b}$

۱۲۳۰- ساده شده عبارت $A = \frac{x^r+2xz+4yz-4y^r}{x-2y+2z}$ کدام است؟

- (۱) $x-z$ (۲) $x-2y$ (۳) $x+z$ (۴) $x+2y$

۱۲۳۱- حاصل عبارت $\frac{x^r-y^r-x+y}{x+y-1}$ کدام است؟

- (۱) $x-y$ (۲) $x-y-1$ (۳) $x-y+1$ (۴) $x+y$

کتاب درسی

۱۲۳۲- عبارت گویای $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

کتاب درسی

۱۲۳۳- عبارت گویای $\frac{x+2}{x(x-1)} - \frac{x-2}{x(x+1)}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۱۲۳۴- اگر $a+b=\sqrt{5}$ حاصل عبارت $\frac{a^r+a^r b^r+b^r}{a^r+ab+b^r} + 3ab$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{r\sqrt{5}}{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

۱۲۳۵- اگر $x+y=4$ حاصل عبارت $\frac{x^r-y^r+4x+4}{x^r+2x+2y-y^r}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{r}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{r}{4}$

۱۲۳۶- حاصل عبارت $\frac{a^6-a^r-a^r+1}{a^r-a^r-a+1}$ به ازای $a=\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}+2$ (۲) $3\sqrt{2}+3$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ (۴) $3\sqrt{2}-3$

۱۲۳۷- مقدار عبارت $\frac{a^6-1}{a^6-a^r+a^r-1} (a^r+a)$ به ازای $a=-\frac{r}{3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{r}{4}$ (۲) $-\frac{r}{3}$ (۳) $-\frac{r}{2}$ (۴) $-\frac{r}{3}$

۱۲۳۸- ساده شده عبارت $(\frac{A}{x^r}+x) - (\frac{f}{x^r} - \frac{r}{x} + 1)$ کدام است؟

- (۱) $x+2$ (۲) $2x-1$ (۳) $2x-2$ (۴) $2x+2$

۱۲۳۹- اگر $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ مقدار $(\frac{a}{b^r} - \frac{b}{a^r}) - (\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1)$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۴۰- حاصل عبارت $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{7+1}+\sqrt{14}+\sqrt{2})$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{14}$



۱۲۴۱- ساده شده عبارت $\frac{8^n + 27^n}{4^n - 6^n + 9^n} - (2^{-n} + 3^{-n})$ کدام است؟

(۱) $2^n + 3^n$ (۲) $2^n - 3^n$ (۳) $4^n + 6^n$ (۴) 6^n

۱۲۴۲- اگر $ab = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3}$ ، حاصل عبارت $a^2 + b^2 + \frac{3a^2b^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 3ab}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{6}$ (۴) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

۱۲۴۳- اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ و $b = \sqrt{6} + 2 - \sqrt{10}$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{10}}$

۱۲۴۴- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + x + 13}{x^2 - 25} - \frac{x^2 - 5x + 26}{x - 5}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) x (۳) $\frac{x+5}{x-5}$ (۴) $\frac{x}{x+5}$

۱۲۴۵- ساده شده عبارت $\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x} - \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x}$ (۲) x (۳) $\frac{1}{2-x}$ (۴) $\frac{2}{1+x}$

۱۲۴۶- ساده شده عبارت $\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + x} + \frac{2}{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{x^2 - 2x}$ (۲) $\frac{3}{x^2 + x}$ (۳) $\frac{1}{x^2 - x - 2}$ (۴) $\frac{1}{x^2 - x^2 - 2x}$

۱۲۴۷- ساده شده عبارت $\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x}$ (۲) $\frac{1}{x^2 + 1}$ (۳) $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{2}{x^2 + 1}$

۱۲۴۸- ساده شده عبارت $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x+1}$ (۲) $\frac{2}{x^2 - 1}$ (۳) $-\frac{2}{x+1}$ (۴) $\frac{2}{x-1}$

۱۲۴۹- مقدار عبارت $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱

۱۲۵۰- ساده شده عبارت $\frac{2}{\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} - \frac{2x}{x-4}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ (۳) $\frac{-1}{\sqrt{x+2}}$ (۴) $\frac{1}{x-4}$

۱۲۵۱- ساده شده عبارت $\frac{1}{a-b} - \frac{a-b}{a^2 + ab + b^2} - \frac{3a^2}{a^2 - b^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{a}{a^2 - b^2}$ (۲) $\frac{b}{a^2 - b^2}$ (۳) $\frac{3b}{a^2 + ab + b^2}$ (۴) $-\frac{3a}{a^2 + ab + b^2}$

۱۲۵۲- عبارت گویای $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{fx+a}$ فقط به ازای یک مقدار x تعریف نمی‌شود. مقدار a کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

کتاب درسی

کتاب درسی



۱۲۵۳- عبارت گویای $\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{2}{x+1}}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۲۵۴- عبارت گویای $\frac{\frac{1}{2x-4}+1}{\frac{x}{2x+6}}$ به ازای چند مقدار x تعریف نمی‌شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۲۵۵- ساده شده عبارت $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{x}+\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{x}-\sqrt{x}$ ۳) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x}$ ۴) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x}$

۱۲۵۶- اگر $a=\sqrt{5}$ مقدار $\frac{(a-1)(a^2+a^2+1)}{a^2-a+1}$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۲۵۷- اگر $x=\sqrt{3}$ مقدار عبارت $\frac{(x^2-x-1)^2+(x^2+x+1)^2-2x^6}{x^2+2x+1}$ کدام است؟

- ۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۲۵۸- ساده شده عبارت $\frac{\sqrt{9a^5}-fa}{\sqrt{3a^2}-2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{a^{-\frac{2}{3}}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{9a}$ ۲) $\sqrt{9a^2}$ ۳) $\sqrt{3a}$ ۴) $\sqrt{3a^2}$

۱۲۵۹- ساده شده عبارت $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \sin x \cos x$ کدام است؟

- ۱) $(\sin x + \cos x)^2$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

درس چهارم / بخش نهم: گویا کردن مخرج‌های گنگ

مفهوم گویا کردن مخرج

محاسبات با کسرهایی که مخرج آن‌ها عددی گویاست، ساده‌تر است. بنابراین بهتر است کسرهارا به‌صورتی بنویسیم که مخرج آن‌ها عددی گویا باشد. تغییر مخرج کسر از عددی گنگ به عددی گویا را **گویا کردن مخرج کسر** می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج کسر را در عاملی مناسب ضرب می‌کنیم و مخرج را ساده می‌کنیم.

روش‌های گویا کردن مخرج‌های گنگ

از بین بردن ریشه

اگر مخرج کسر شامل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، که در آن $m < n$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

مثال:

الف) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

پ) $\frac{2}{\sqrt{x^2}} = \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}^2} = \frac{2\sqrt{x}}{x \times x} = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$

تست ۱

برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{6}{\sqrt{8} \times \sqrt{2}}$ کوچکترین عدد مثبتی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

$\sqrt[3]{2^{11}}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt[3]{2}$ (۲)

$\sqrt[3]{2^5}$ (۱)

ابتدا مخرج کسر را به‌صورت یک ریشه می‌نویسیم:

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = 2^2 \times 2 = 2^3 = (2^3)^2 \times 2^2 = 2^4 \times 2^2 = 2^6 \times 2 = 2^7 = \sqrt[3]{2^{12}} = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین صورت و مخرج کسر را باید در $\sqrt[3]{2^{12}}$ ، یعنی $\sqrt[3]{2^{11}}$ ضرب کنیم.

استفاده از اتحاد مزدوج

اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.

مثال:

الف) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



تسبیح
□□□□

حاصل $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1-3$ (۴) 5

مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

را حل

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} = 5+3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

تسبیح
□□□□

حاصل $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 1 (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $1-\sqrt{3}$

ابتدا هر یک از دو کسر را گویا می‌کنیم:

را حل

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1, \quad \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با ۱ است.

تسبیح
□□□□

اگر $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) 272 (۲) 275 (۳) 277 (۴) 279

چون مخرج را می‌توان به صورت $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ نوشت، پس می‌توان برای گویا کردن مخرج از اتحاد مزدوج استفاده کرد. بنابراین

را حل

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

اکنون برای گویا کردن مخرج این کسر صورت و مخرج آن را یک بار دیگر در مزدوج مخرجش ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{25}+\sqrt{9}) = \sqrt{125} + \sqrt{45} + \sqrt{75} + \sqrt{27}$$

بنابراین $a+b+c+d = 125+45+75+27 = 272$.

تسبیح
□□□□

حاصل $\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (۲) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (۳) $1+\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (۴) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

را حل

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم: $\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$



تست ۶

حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{7}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $\sqrt{7}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

کسر $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ را به صورت $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}$ می‌نویسیم و مخرج آن را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9+2+6\sqrt{2}}{9-2}} = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{7}}$$

بنابراین عبارت A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A = \sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{7}} \times \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})}}{\sqrt{7 \times 7}} = \frac{\sqrt{121-36 \times 2}}{7} = \frac{\sqrt{49}}{7} = 1$$

راهنما

استفاده از اتحاد جاق و لاغر

- اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ و $\sqrt{a^2}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.
- اگر در مخرج کسری یکی از عبارت‌های $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.

مثال:

الف) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+\sqrt{2}+1$

ب) $\frac{6}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{16}-\sqrt{8}+\sqrt{4}}{\sqrt{16}-\sqrt{8}+\sqrt{4}} = \frac{6(\sqrt{16}-\sqrt{8}+\sqrt{4})}{4+2} = \frac{\sqrt{16}-\sqrt{8}+\sqrt{4}}{2} = \sqrt{4}-\sqrt{2}+\sqrt{4}$

تست ۷

حاصل $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \sqrt{4} + \sqrt{9}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{4}-\sqrt{9}$ (۴) $\sqrt{9}-\sqrt{4}$

ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد جلق و لاغر.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{9}}{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{9}}{2-3} = -\sqrt{4}-\sqrt{6}-\sqrt{9}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-\sqrt{6}$.

راهنما

تست ۸

حاصل $\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1} + 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{9}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{9}}{3}$

می‌توان نوشت

$$\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3^2}+\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3}-1$$

$$\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1} + 1 = \sqrt{3}$$

راهنما



گویا کردن مخرج‌های گنگ

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



کتاب درسی

۱۲۶۰- برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt{8}}$ ، کوچک‌ترین عدد مثبتی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{4}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{16}$

کتاب درسی

۱۲۶۱- حاصل $2 + \frac{2}{\sqrt{3+1}}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}-1$ (۲) 4 (۳) $\sqrt{3}+2$ (۴) $\sqrt{3}+1$

کتاب درسی

۱۲۶۲- عبارت $A = \frac{1}{2\sqrt{2}-3} + 2\sqrt{2}$ با کدام برابر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) 2 (۴) -2

۱۲۶۳- حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{3}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{3}$ (۲) $-4/5$ (۳) $4/5$ (۴) $\frac{2}{2}\sqrt{3}$

۱۲۶۴- حاصل $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۲۶۵- اگر $y = 2 - \sqrt{3}$ ، حاصل $-\sqrt{3} + 6y^{-1}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) $2+2\sqrt{3}$ (۴) $2-2\sqrt{3}$

۱۲۶۶- اگر $a = 2 - \sqrt{5}$ ، حاصل عبارت $\frac{2a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{5}$ (۲) $-2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}-2$ (۴) $2+\sqrt{5}$

۱۲۶۷- اگر $a = \sqrt{5}$ ، مقدار $(a^2 - 2)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $1+\sqrt{5}$ (۲) $2+\sqrt{5}$ (۳) $1+2\sqrt{5}$ (۴) $1+\sqrt[3]{5}$

۱۲۶۸- عبارت $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

۱۲۶۹- معکوس عدد $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{4-\sqrt{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ (۳) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (۴) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$

۱۲۷۰- مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-18+8\sqrt{2}}{7}$ (۲) $-2-4\sqrt{2}$ (۳) $-6-2\sqrt{2}$ (۴) $-6\sqrt{2}-10$



۱۲۷۱- عبارت $\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3+1}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۴) $\sqrt{3}+1$

۱۲۷۲- حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{7}{3+\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۴

۱۲۷۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}+1} - \sqrt{\frac{5}{3}-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

۱۲۷۴- حاصل $A = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}-2}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (۴) ۴

۱۲۷۵- مقدار $\frac{7}{\sqrt{25}-\sqrt{10}+\sqrt{4}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۷۶- اگر $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{a}{2}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

کتاب درسی



۱۲۷۷- مقدار $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۱۲۷۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\sqrt{2}+1$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۲۷۹- اگر $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}$ و $b = 1+\sqrt{2}$ حاصل $\frac{ab-1}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) -۲ (۴) $-2\sqrt{2}$

۱۲۸۰- حاصل عبارت $\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۸۱- اگر $a < 0$ و $ab < 0$ حاصل عبارت $\frac{1}{|a-b-3\sqrt{2}|-|b-a+\sqrt{2}|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{12}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{18}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}$

۱۲۸۲- اگر $x = \frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 2^{\frac{1}{2}}$ حاصل $(x-1)^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{3}+1 \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$\sqrt{۴} \quad (۳)$$

$$۱۵۷ \quad (۴)$$

$$۱۵۵ \quad (۳)$$

۱۲۸۳- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-\sqrt{6}-\sqrt{1}+\sqrt{15}}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

۱۲۸۴- حاصل عبارت $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$\sqrt{3}-1 \quad (۱)$$

۱۲۸۵- حاصل $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{4}+\sqrt{2}}$ کدام است؟

$$2 \quad (۲)$$

۱۲۸۶- اگر $1 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ مقدار $a+b+c$ کدام است؟

$$۱۵۳ \quad (۲)$$



۱۲۸۷- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$2-\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$2+\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۱۲۸۸- حاصل $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ کدام است؟

$$11 \quad (۴)$$

$$1-\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۱)$$

۱۲۸۹- حاصل عبارت $\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{3}+1} + \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1}$ کدام است؟

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

۱۲۹۰- اگر $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ و $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ حاصل عبارت $x^2 + 12xy + y^2$ کدام است؟

$$55 \quad (۴)$$

$$65 \quad (۳)$$

$$64 \quad (۲)$$

$$52 \quad (۱)$$

۱۲۹۱- اگر $x = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ حاصل $(x+\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2}$ کدام است؟

$$3 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

۱۲۹۲- اگر $a = \sqrt{2}-1$ ، $b = \sqrt{5}-2$ و $c = \sqrt{1}-3$ ، کدام گزینه درست است؟

$$b < c < a \quad (۴)$$

$$e < b < a \quad (۳)$$

$$a < c < b \quad (۲)$$

$$a < b < c \quad (۱)$$

۱۲۹۳- حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$ چند است؟

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$-1+\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$-1+\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۱۲۹۴- اگر a_n جمله عمومی دنباله‌ای حسابی و d قدرنسبت دنباله باشد، مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{d}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_r}} + \frac{d}{\sqrt{a_r}+\sqrt{a_r}} + \dots + \frac{d}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1} \quad (۴)$$

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1} \quad (۳)$$

$$n\sqrt{a_n} \quad (۲)$$

$$\sqrt{a_n} \quad (۱)$$



کنکور سراسری

ریاضی ۹۳

۱۲۹۵- حاصل عبارت $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2}\sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $1+\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

ریاضی ۹۵

۱۲۹۶- اگر $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{2}-4$ و $\beta = \sqrt{2}\sqrt{2}+4$ ، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$

تجربی ۹۹

۱۲۹۷- حاصل عبارت $(\sqrt{8}+\sqrt{27})^{-1} - 2(\sqrt{9}-1)^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1+\sqrt{3}$ (۲) $-1+\sqrt{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

تجربی خارج ۹۹

۱۲۹۸- حاصل عبارت $(\sqrt{27}-1) + (2-\sqrt{3})^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1+2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1+\sqrt{3}$ (۴) ۱

تجربی ۱۴۰۰

۱۲۹۹- فرض کنید $a = \sqrt{6-2}$ و $b = \sqrt{6+2}$ ، مقدار $(a^2 + b^2 - rab)^2 (a^2 + b^2 + rab)^2$ ، کدام است؟

- (۱) $4(2+\sqrt{3})$ (۲) $4(2-\sqrt{3})$ (۳) $16(2+\sqrt{3})$ (۴) $16(2-\sqrt{3})$

تجربی خارج ۱۴۰۰

۱۳۰۰- فرض کنید $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ ، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۴۹

تجربی ۱۴۰۱

۱۳۰۱- حاصل عبارت $\sqrt[3]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1+\sqrt{7}}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt[3]{2}$

تجربی خارج ۱۴۰۱

۱۳۰۲- حاصل عبارت $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3+\sqrt{5}})$ ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

ریاضی ۱۴۰۱

۱۳۰۳- اگر $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2-1} = 2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^2-\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{a^2+\sqrt{a^2+1}})^{1401}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

تجربی ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۱۳۰۴- ریشه هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a یا توان $\frac{10}{7}$ است. $(\frac{1}{a}-3)$ چند برابر $(1+\sqrt{3})$ است؟

- (۱) $6-3\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $6+2\sqrt{3}$



آزمون فصل سوم ۱

۱۳۰۵- مقدار $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^8$ کدام است؟

- ۴ (۴) $\sqrt{8}$ (۳) ۱۶ (۲) ۸ (۱)

۱۳۰۶- اگر $a < 1 < a^{-1}$ ، آن گاه حاصل عبارت $A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- صفر (۴) $2a$ (۳) $2\sqrt[3]{a}$ (۲) $2\sqrt{a}$ (۱)

۱۳۰۷- اگر $a = \sqrt{3}$ ، $b = \sqrt[3]{9}$ و $c = \sqrt[3]{27}$ ، کدام درست است؟

- $a < b < c$ (۴) $a < c < b$ (۳) $b < a < c$ (۲) $c < b < a$ (۱)

۱۳۰۸- حاصل $9^{\frac{2}{3}} \times 18^{\frac{1}{3}} \times (\frac{1}{27})^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

- $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۳۰۹- اگر $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ ، حاصل $\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$ چقدر است؟

- ۱ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۲) -۱ (۱)

۱۳۱۰- اگر $a - b - c = 2$ و $ab + ac - bc = 3$ ، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۲ (۲) ۱۴ (۱)

۱۳۱۱- حاصل عبارت $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2b(3a^2 + b^2)} + 1$ کدام است؟

- $\frac{a}{b}$ (۴) $\frac{a}{b}$ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۳۱۲- مقدار عبارت $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- $\sqrt[3]{2}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۱۳۱۳- در تجزیه عبارت $2x^2 - x^2 - 2x + 1$ کدام عبارت وجود ندارد؟

- $2x + 1$ (۴) $2x - 1$ (۳) $x + 1$ (۲) $x - 1$ (۱)

۱۳۱۴- معکوس کدام یک از عددهای زیر برابر $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ است؟

- $2 - 2\sqrt{2}$ (۴) $2 + 2\sqrt{2}$ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۱)



آزمون فصل سوم ۲

۱۳۱۵- اگر $a < 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟

- (۱) $3a$ (۲) $-a$ (۳) $-2a$ (۴) $-3a$

۱۳۱۶- اگر $a > \sqrt{a}$ ، آن‌گاه کدام یک درست نیست؟

- (۱) $a^2 > a^{\sqrt{a}}$ (۲) $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$ (۳) $\sqrt[3]{a^2} > a$ (۴) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt{a}$

۱۳۱۷- اگر $x^2 = 48$ ، مقدار $\frac{x}{x^2} - \frac{x}{x^2}$ بر حسب x برابر کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) x^2 (۳) x^2 (۴) x

۱۳۱۸- اگر $0 < a < 1$ ، کدام درست است؟

- (۱) $a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{3}} < a$ (۲) $a^{\frac{1}{2}} < a < a^{\frac{1}{3}}$ (۳) $a < a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{3}}$ (۴) $a < a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}}$

۱۳۱۹- مقدار $\sqrt{2\sqrt{2+1}} \times \sqrt{9-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $3-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{15}$ (۴) 7

۱۳۲۰- اگر $x^2 + 5x = 7$ ، حاصل عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ کدام است؟

- (۱) 130 (۲) 140 (۳) 142 (۴) 144

۱۳۲۱- اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ ، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۲۲- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{1-\sqrt{5}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳۲۳- حاصل عبارت $\frac{3y^2+3}{y-x} + \frac{x-xy+y^2x}{xy-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $y-x$ (۲) $y+x$ (۳) $3(y+1)$ (۴) $y+1$

۱۳۲۴- اگر $\frac{3}{(\sqrt{2+1})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ، مقدار ab کدام است؟

- (۱) 2 (۲) -4 (۳) 4 (۴) -2



۱ ۸۳۹ توجه کنید که

$$\sqrt{6}\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{9} = \sqrt{6\sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{9}} = \sqrt{6\sqrt{7}\sqrt{4}\sqrt{9}} = \sqrt{6\sqrt{7}\sqrt{36}} = \sqrt{6\sqrt{7}\sqrt{6^2}} = \sqrt{6\sqrt{7}\times 6} = \sqrt{6\times 6\sqrt{7}} = \sqrt{36\sqrt{7}} = 6\sqrt{\sqrt{7}} = 6\sqrt{7}$$

۴ ۸۴۰ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{(-3)^3} = |-3| = 3, \quad \sqrt{-64} = \sqrt{-4^2} = \sqrt{(-4)^2} = -4$$

$$\sqrt[3]{5^3} = 5, \quad \sqrt[3]{-3^3} = \sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $3-4+5-(-2)=6$

۴ ۸۴۱ می‌دانیم اگر $a < 0$ آن‌گاه $\sqrt[3]{a^3} = -a$. بنابراین

$$1-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

$$1-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با

$$\sqrt{2}-1-(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}-\sqrt{2}=0$$

۲ ۸۴۲ توجه کنید که اگر $a < b < 0$ آن‌گاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. بنابراین

$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5}-3 < 0$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$ از طرف دیگر

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = \sqrt{3}-2$$

همین‌طور

$$4 < 5 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}-2 > 0$$

بنابراین $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$ به این ترتیب عبارت مورد

نظر برابر است با $3-\sqrt{5}+\sqrt{3}-2+\sqrt{5}-2 = \sqrt{3}-1$

۲ ۸۴۳ توجه کنید که $x=2-\sqrt{7} < 0$. بنابراین

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x, \quad \sqrt[3]{(-x)^3} = -x, \quad \sqrt[3]{(-x)^3} = |-x| = -x$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $(-x)+(-x)-(-x)=-x$.

۲ ۸۴۴ چون a منفی است، پس

$$\sqrt[3]{a^3} = |a| = -a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = -a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt{a^2} = a$$

همچنین

$$\frac{a}{-a} + \frac{a}{-a} = -2$$

پس عبارت مورد نظر برابر است با -2

۲ ۸۴۵ توجه کنید که $\sqrt{a^2} = |a| = -a$. بنابراین

$$\sqrt{-a}\sqrt{(-a)^2}\sqrt{a^2} = \sqrt{-a}\sqrt{(-a)^2}(-a) = \sqrt{-a}\sqrt{(-a)^2}(-a)^2$$

$$= \sqrt{-a(-a)} = \sqrt{a^2} = -a$$

۴ ۸۴۶ توجه کنید که $a+b < 0$. در نتیجه

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = -(a+b)$$

همچنین $\sqrt[3]{(a+b)^3} = a+b$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۱ ۸۳۲ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{(0/016)^{-1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{16}{10^2}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{10^2}{16}} = \sqrt[3]{\left(\frac{10}{2}\right)^2} = 5$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $-\frac{2}{100} \times 5 = -0.1$

۱ ۸۳۳ توجه کنید که

$$\sqrt{-18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{\sqrt{18}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{10}, \quad \sqrt{-98} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{98}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{7\sqrt{2}}{10} \right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{10\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

۴ ۸۳۴ توجه کنید که

$$\sqrt{-125} = \sqrt{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{10^3}} = \frac{5}{10}, \quad \sqrt{-0.256} = \sqrt{\frac{256}{10000}} = \frac{\sqrt{4^4}}{\sqrt{10^4}} = \frac{4}{10}$$

$$\sqrt[3]{0/00001} = \sqrt[3]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^5}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $9 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۲ ۸۳۵ هر یک از ریشه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{-0.004} = \sqrt{\frac{4}{10^4}} = \frac{2}{100}, \quad \sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{\frac{8}{10^3}} = \frac{2}{10}$$

$$\sqrt[3]{0.0016} = \sqrt[3]{\frac{16}{10^4}} = \frac{2}{10}, \quad \sqrt[3]{0.00001} = \sqrt[3]{\frac{1}{10^5}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{2}{100} + \frac{2}{10} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

۱ ۸۳۶ ابتدا ریشه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{0.00032} = \sqrt[3]{\frac{32}{10^5}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{10}\right)^5} = \frac{2}{10}$$

$$\left(\sqrt[3]{0.0016}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{0.0016}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{16}{10^4}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2^4}{10^4}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{10}}} = \frac{1}{10}$$

بنابراین حاصل ضرب مورد نظر برابر $1 \times \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ است.

۴ ۸۳۷ توجه کنید که

$$\sqrt{(0.27)^{-2}} = (0.27)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(0.27)^{-2}}} = \frac{1}{(0.27)^{-1}} = 0.27$$

$$\sqrt[3]{(0.32)^{-5}} = (0.32)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(0.32)^{-5}}} = \frac{1}{(0.32)^{-1}} = 0.32$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $0.27 - 0.32 = -0.05 = -\frac{1}{20}$

۲ ۸۳۸ می‌توان نوشت $\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{16} = 2$



۸۴۷ ۱ چون $0 < a < -b$ پس a مثبت است، b منفی است و $a+b$ هم منفی است. بنابراین

$$\sqrt[3]{-a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{(a+b)^2} = -a + |b| - |a+b| = -a - b - (-(a+b)) = 0$$

۸۴۸ ۲ چون $a \leq 1$ ، $1-a \geq 0$ اکنون توجه کنید که

$$(1-a)^2 = \underbrace{(1-a)}_{\geq 0} \underbrace{(1-a)}_{\geq 0}$$

$$\sqrt{(1-a)^2} = |1-a| \sqrt{1-a} = (1-a) \sqrt{1-a}$$

۸۴۹ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{2} = 2 \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \times \sqrt[3]{2} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4 \sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} - 2 \sqrt[3]{2} + 4 \sqrt[3]{2} = 3 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{54}$$

۸۵۰ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2 \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2 \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 8 \sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2} + 2 \sqrt[3]{2} + 2 \sqrt[3]{2} - 8 \sqrt[3]{2} = -3 \sqrt[3]{2}$$

۸۵۱ ۱ ریشه‌های چهارم عدد a برابر $\sqrt[4]{a}$ و $-\sqrt[4]{a}$ هستند. بنابراین

$$\sqrt[4]{a} - (-\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a}$$

$$2 \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a} \Rightarrow \sqrt[4]{a} = \frac{\sqrt[4]{a}}{2} \Rightarrow (\sqrt[4]{a})^4 = \left(\frac{\sqrt[4]{a}}{2}\right)^4 \Rightarrow a = \frac{(\sqrt[4]{a})^4}{2^4} = \frac{a}{16} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ پس } \frac{a}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

۸۵۲ ۴

$$\sqrt[4]{-x^4} = \sqrt[4]{(-x)x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{(x^2)^2} = \sqrt[4]{-x} \times x^2 = x^2 \sqrt[4]{-x}$$

۸۵۳ ۳ چون $x < 0$ پس

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = -x^2, \quad \sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$$

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = -x^2$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-x^2$.

۸۵۴ ۳ از شناوی داده شده نتیجه می‌شود $\frac{2}{x} = \sqrt[3]{-64}$ یعنی

$$\frac{2}{x} = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{-10^3} = -10 \text{ پس } \frac{2}{x} = -10 \Rightarrow x = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$\sqrt[3]{6x-3} = \sqrt[3]{3-3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

۸۵۵ ۲ با توجه به تعریف ریشه دوم،

$$x - \sqrt{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9 + \sqrt{x}$$

$$\frac{9 + \sqrt{x}}{x} = 1 \text{ بنابراین}$$

۸۵۶ ۲ توجه کنید که $0.000027 = 27 \times 10^{-6}$ در نتیجه

$$a = \sqrt[3]{27 \times 10^{-6}} = 3 \times 10^{-2} = 0.03$$

$$\text{بنابراین } 3 = 10 \times a \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{10 \times a} = 10 \sqrt{a}$$

۸۵۷ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{3 \times 4} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 2a$$

۸۵۸ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad (1-\sqrt{2} < 0 \text{ چون})$$

$$\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$.

۸۵۹ ۱ چون $\sqrt{-x}$ در معادله وجود دارد، پس x عددی منفی است.

توجه کنید که x نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در این صورت مخرج کسر برابر صفر خواهد بود. بنابراین $\sqrt[3]{x^3} = x$ ، $\sqrt{x^2} = -x$ ، $(\sqrt{-x})^2 = -x$ و در نتیجه

$$\frac{(\sqrt{-x})^2 - 2\sqrt{x^3} - \sqrt{x^2}}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{-x - 2x + x}{x^2} = 1$$

$$\frac{-2x}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

۸۶۰ ۲ چون $-1 < x < 0$ پس x و $x-1$ هر دو منفی اند. بنابراین

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x, \quad \sqrt{|x-1|} = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x}$$

پس

$$\sqrt{1+\sqrt{x^2}} \times \sqrt{|x-1|} = \sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x} = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x$$

۸۶۱ ۲ چون $x < 0$ و $y > 0$ پس $xy < 0$ و در نتیجه $xy-1 < 0$.

پس عبارت‌ها به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\sqrt{x^2 y^2} = xy, \quad \sqrt[3]{16x^3 y^3} = \sqrt[3]{(2xy)^3} = 2xy$$

$$\sqrt{(xy-1)^2} = -xy+1$$

$$A = xy - 2xy - (-xy+1) = -1$$

۸۶۲ ۱ ابتدا هر عبارت را یک‌کالی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = ab, \quad \sqrt[3]{(-a)^3 b^3} = \sqrt[3]{(-ab)^3} = -ab$$

$$b \sqrt{a^2} = b|a| = -ab \quad (a < 0 \text{ چون})$$

$$a \sqrt[3]{(-b)^3} = a|b| = ab \quad (b > 0 \text{ چون})$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $ab - (-ab) + (-ab) + ab = 2ab$.

۸۶۳ ۳ ابتدا ریشه‌ها را ساده‌تر می‌کنیم (توجه کنید که چون $a < 0$ پس $|a| = -a$)

$$\sqrt[3]{a^3} = |a| = -a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt{-3a^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{-3a} = |a| \sqrt{-3a} = -a \sqrt{-3a}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$-a \sqrt{-3a} - a - (-a) = -a \sqrt{-3a}$$



۱ ۸۷۳ چون $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ ، پس دست کم یکی از عددهای a ، b و c فرینه دیگری است. فرض کنیم $b = -a$. در این صورت $abc = -a^2 \times c < 0$. بنابراین $c > 0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{a}{\sqrt{a^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2}} = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = \frac{b=-a}{c>0} \rightarrow \frac{a}{|a|} + \frac{-a}{|a|} + 1 = 1$$

۲ ۸۷۴ توان چهارم هر یک از گزینه‌ها را حساب می‌کنیم. تا معلوم شود کدام یک به ۳ نزدیک‌تر است.

گزینه (۱): $(2/2)^4 = 23/4$, $3 = 23/4 = 6/6$

گزینه (۲): $(2/3)^4 = 27/9$, $3 = 27/9 = 2/1$

گزینه (۳): $(2/4)^4 = 23/1$, $33/1 - 3 = 3/1$

گزینه (۴): $(2/5)^4 = 29/5$, $39/5 - 3 = 9/5$

بنابراین $2/3$ تقریب بهتری برای $\sqrt[3]{3}$ است.

۳ ۸۷۵ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $3^2 < 13 < 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$

گزینه (۲): $3^2 < 31 < 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{31} < 4$

گزینه (۳): $4^2 < 31 < 5^2 \Rightarrow 4 < \sqrt{31} < 5$

گزینه (۴): $3^5 < 3 < 4^5 \Rightarrow 3 < \sqrt[5]{3} < 4$

بنابراین $\sqrt[5]{31}$ بین ۳ و ۴ قرار ندارد.

۱ ۸۷۶ چون مقدار ریشه چهارم مثبت عددهای توان چهارم کامل را می‌دانیم، پس ابتدا دو عدد توان چهارم کامل متوالی پیدا می‌کنیم که ۴۵۰ بین آن‌هاست. توجه کنید که $4^4 = 256$ و $5^4 = 625$. بنابراین

$$4^4 < 450 < 5^4 \Rightarrow \sqrt[4]{4^4} < \sqrt[4]{450} < \sqrt[4]{5^4} \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{450} < 5$$

۴ ۸۷۷ معلوم است که a باید نامنفی باشد تا \sqrt{a} معنی داشته باشد.

اگر $a \leq 1$ ، آن‌گاه $\sqrt{a} \leq \sqrt[3]{a}$ ، که خلاف فرض است. بنابراین $a > 1$. در این حالت، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. اما $\sqrt{a} < a < a^2$ پس گزینه (۴) درست نیست.

۴ ۸۷۸ ابتدا عبارت مورد نظر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|a - \sqrt{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| - |a - \sqrt[3]{a}|$$

اکنون توجه کنید که چون $a < 1$ ، پس $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$. بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{a} - a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - (\sqrt[3]{a} - a) = 0$.

۳ ۸۷۹ چون $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$ ، پس $a < 1$ و در نتیجه واضح است که

$$\sqrt{a} > \sqrt[3]{a} \text{ و } \sqrt[3]{a} > a \text{، همچنین از } a < 1 \text{ نتیجه می‌شود } a^2 > a^3 \text{ و در نتیجه}$$

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{a^3} \text{، یعنی } \sqrt{a^2} > \sqrt[3]{a^2} \text{، ولی } \sqrt{a^2} > \sqrt[3]{a^2} \text{ درست نیست، زیرا}$$

$$- < a < 1 \Rightarrow a^2 < a^3 \Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt[3]{a^2}$$

۳ ۸۸۰ دو طرف نابرابری $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{a})^6 < (\sqrt[3]{a})^6 \Leftrightarrow a^3 < a^2 \Leftrightarrow a^2 < a^3 = 216$$

بنابراین همه عددهای طبیعی مانند a که $a^2 < 216$ ویژگی مورد نظر را دارند.

چون ۱۴۲ بزرگ‌ترین مربع کاملی است که از ۲۱۶ کوچک‌تر است، پس ۱۴

عدد طبیعی ویژگی مورد نظر را دارند.

۳ ۸۶۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = |x||y| + |y|x| + |xy| - |xy| = |xy| + |y|x|$$

می‌دانیم $xy < 0$ و $x < 0$. در نتیجه $|x| = -x$ و $|xy| = -xy$. بنابراین

$$A = -2xy$$

۲ ۸۶۵ توجه کنید که $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ در نتیجه

$$a^2 - \sqrt{a^2} + 16 + \sqrt{a^2} = a^2 - \sqrt{a^2} + 16 = (a-4)^2$$

بنابراین $\sqrt{a^2 - \sqrt{a^2} + 16 + \sqrt{a^2}} = \sqrt{(a-4)^2} = |a-4|$ چون a منفی

است، پس $a-4 < 0$. در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $4-a$ است.

۲ ۸۶۶ توجه کنید که

$$a^4 = 16 \Rightarrow (a^2)^2 = 16 \Rightarrow a^2 = \sqrt{16} = \sqrt{2^2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$b^2 = -54 \Rightarrow b = \sqrt{-54} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3} = -3\sqrt{2}$$

بنابراین

$$\frac{a^2 + b}{a^2 - b} = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5}$$

۳ ۸۶۷ توجه کنید که $xy = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$. همچنین $x^2 = 2$

و $y^2 = 4$ در نتیجه

$$xy^2 = (xy)y^2 = 2(4) = 8, \quad x^2y = (x^2)y = 2(2) = 4$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $(8-1)(4+2+1) = 49$.

۴ ۸۶۸ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8}}{\sqrt{8} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{32}}{\sqrt{16} \times \sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{16} \times \sqrt{2}} = 0$$

۴ ۸۶۹ با مخرج مشترک‌گیری معلوم می‌شود که

$$\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}}{2\sqrt{8} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8}}{2\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{32}}{2\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2+2}{2\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2}{2\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\left(\frac{1}{\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}}\right)^6 = \frac{1^6}{(\sqrt{16})^6 \times (\sqrt[3]{2})^6} = \frac{1^6}{8^3 \times 2^2} = \frac{1^6}{2^{24} \times 2^2} = \frac{1^6}{2^{26}} = \frac{1}{2^{26}}$$

۱ ۸۷۰ دقت کنید که $\frac{x^2}{y} > \frac{y^2}{x}$ در نتیجه

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y}} \times \sqrt{\frac{x}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y}} = \frac{x^2}{y^2}$$

۴ ۸۷۱ اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{2} = a$ ، آن‌گاه $2 = a^3$. همچنین،

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = a^3$$

$$\frac{2 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8+1}} = \frac{a^3 + a}{a^3 + 1} = \frac{a(a^2 + 1)}{a^3 + 1} = a = \sqrt[3]{2}$$

۲ ۸۷۲ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{4 \times 2}, \quad \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4 \times 3}, \quad \dots, \quad \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4 \times 2.5}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{12} + \dots + \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4} (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{2.5}) = \sqrt[3]{4} a$$



۱ ۸۸۷ با توجه به $a < 1 < b$ نتیجه می‌شود $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. با توجه به $b > 1$ نتیجه می‌شود $\sqrt{b} > \sqrt{b}$. همچنین از $a < b$ نتیجه می‌شود $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ بنابراین

$$A = \frac{-(\sqrt{a}-\sqrt{a})+\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = 1$$

۲ ۸۸۸ چون $\sqrt{5f} = \sqrt{r^2 \times 2} = r\sqrt{2}$ و $\sqrt{f} = \sqrt{r}$ پس $\sqrt{5f} + \sqrt{f} = r\sqrt{2} + \sqrt{r} = 4\sqrt{r}$

۳ ۸۸۹ چون $\sqrt{11} = \sqrt{27} \times \sqrt{r} = 3\sqrt{3}$ پس $\sqrt{\sqrt{11}-2\sqrt{3}} = \sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

۱ ۸۹۰ توجه کنید که

$$\sqrt{5f} = \sqrt{r^2 \times 2} = r\sqrt{2}, \quad \sqrt{r5} = \sqrt{5r^2 \times 2} = 5\sqrt{r}$$

بنابراین $\sqrt{5f} + \sqrt{r5} = 8\sqrt{r}$ به این ترتیب

$$\sqrt{\sqrt{5f} + \sqrt{r5}} = \sqrt{8\sqrt{r}} = \sqrt{8} \times \sqrt{\sqrt{r}} = \sqrt{8} \times \sqrt{r} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{r} = 2\sqrt{2r}$$

بنابراین $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5f} + \sqrt{r5}}} = \frac{1}{2\sqrt{2r}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{4}$

۲ ۸۹۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{135} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}\sqrt{5})^2} = \sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5}^2 \times 5} = \sqrt{\sqrt{5}^4} = \sqrt{\sqrt{5}^4} = \sqrt{5}$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 5$

۲ ۸۹۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{3}$ ، بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \times 3} = \sqrt[5]{9}$

۲ ۸۹۳ ابتدا توجه کنید که $2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^2} \times 2 = \sqrt[5]{2^5}$ بنابراین $\sqrt[5]{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[5]{\sqrt[5]{2^5}} = \sqrt[5]{2}$

۴ ۸۹۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{3^2} \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^2 \times 3} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$= \sqrt[3]{(3^2)^3} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{27} = 3$$

۴ ۸۹۵ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = 0$

۱ ۸۹۶ ابتدا توجه کنید که چون n عددی فرد است، پس $n+1$ زوج است، بنابراین، چون a عددی منفی است، پس

$$\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = a - |a| = a - (-a) = a + a = 2a$$

۳ ۸۸۱ اگر طرفین نابرابری‌ها را به توان شش برسانیم، به دست می‌آید $(\sqrt{2})^6 < (\sqrt{n})^6 < (\sqrt{3})^6 \Rightarrow 2^3 < n^3 < 3^3 \Rightarrow 8 < n^3 < 27$ توجه کنید که فقط عددهای طبیعی ۳، ۴ و ۵ در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند.

۲ ۸۸۲ اگر ریشه سوم عدد a در بازه $(2, 3)$ قرار داشته باشد، می‌توان نوشت $2 < \sqrt[3]{a} < 3$ یعنی $2^3 < (\sqrt[3]{a})^3 < 3^3$ و در نتیجه $8 < a < 27$. اعداد طبیعی ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۲۶ را می‌توان در نابرابری فوق به جای a قرار داد. پس ۱۸ عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت که ریشه سوم آن‌ها در بازه $(2, 3)$ قرار دارد.

۴ ۸۸۳ اولاً واضح است که $\sqrt{0} = 0$ و ریشه چهارم عدد صفر در بازه مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت است که ریشه چهارم مثبت آن در بازه $(0, 3)$ قرار دارد، یعنی

$$0 < \sqrt[4]{a} < 3 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{a})^4 < 3^4 \Rightarrow 0 < a < 81$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت است که ریشه چهارم منفی آن در بازه $(-4, 0)$ قرار دارد، یعنی

$$-4 < -\sqrt[4]{b} < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{b} < 4 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{b})^4 < 4^4 \Rightarrow 0 < b < 256$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشه چهارم در بازه $(-4, 3)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ است.

۴ ۸۸۴ فرض کنید n یکی از این عددها باشد. در این صورت

$$3 < \sqrt[4]{n} < 4 \xrightarrow{\text{توان ۴}} 3^4 < n < 4^4 \Rightarrow 81 < n < 256 \quad (1)$$

$$2 < \sqrt[5]{n} < 3 \xrightarrow{\text{توان ۵}} 2^5 < n < 3^5 \Rightarrow 32 < n < 243 \quad (2)$$

چون n باید در هر دو شرط (۱) و (۲) صدق کند، پس $81 < n < 243$. چون عددی طبیعی است، پس $82 \leq n \leq 242$. بنابراین n یکی از عددهای ۸۲، ۸۳، ... و ۲۴۲ است، که تعداد آن‌ها برابر است با $242 - 82 + 1 = 161$.

نکته: اگر m و n عددهایی طبیعی باشند و $m < n$ ، تعداد عددهای طبیعی از m تا n خود این دو عدد را هم حساب می‌کنیم) برابر است با $n - m + 1$.

۳ ۸۸۵ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow a - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$ ، یعنی گزینه (۱) درست است.

گزینه (۲): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow a - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$ ، یعنی گزینه (۲) درست است.

گزینه (۳): توجه کنید که

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1, \quad 1 < a < 2 \Rightarrow a - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{a-1} < 1$$

بنابراین $\sqrt{a} > \sqrt{a-1}$ ، یعنی گزینه (۳) درست نیست.

گزینه (۴): چون $a > 1$ ، پس $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ ، یعنی گزینه (۴) درست است.

۴ ۸۸۶ ابتدا a ، b و c را ساده‌تر می‌کنیم:

$$a = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}, \quad b = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, \quad c = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

بنابراین $a - c = \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$ ، همچنین $b - c = \sqrt{2} - \sqrt{5} < 0$ و در نتیجه $a > c > b$.



توجه کنید که **۳ ۹۰۶**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{16}} &= \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^2} \\ \sqrt[3]{96} &= \sqrt[3]{2^5 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2 \times 3} = 2 \times \sqrt[3]{6} \\ \frac{2}{\sqrt[3]{16}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{2^4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{2 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^5}}\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$.

سمت چپ تساوی‌ها را ساده می‌کنیم: **۲ ۹۰۷**

گزینه (۱) $\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

گزینه (۲) $\sqrt{3} \sqrt{3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

گزینه (۳) $\sqrt{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$

گزینه (۴) $\sqrt{2} \sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

ابتدا توجه کنید که می‌توان عددهای زیر را دیکال بزرگ را با **۴ ۹۰۸**

فرجه یکسان نوشت: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2^3}$ و $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3}$. بنابراین

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{6}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2 \times 3} = \sqrt[3]{2^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^2} = \sqrt{6}$$

توجه کنید که **۱ ۹۰۹**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{3} \sqrt{3}} &= \sqrt[3]{3 \times 3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2} \\ \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{2^2 \times 2} = \sqrt[3]{2^3} = 2\end{aligned}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3^2}{2}}$

توجه کنید که **۳ ۹۱۰** $\sqrt[3]{\sqrt{2} k - 2} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}} k - 2} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}} k - 2}$. بنابراین

اگر دو طرف این تساوی را به توان شش برسانیم، به $\sqrt[3]{\sqrt{2} k - 2} = 8 = 2^3$ دست می‌آید.

بنابراین $k - 2 = 18$ ، یعنی $k = 21$.

توجه کنید که **۲ ۹۱۱**

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3} &= \sqrt{3^2 \times 3 \times 3} = \sqrt{3^4} = 3^2 \\ &= \sqrt{\sqrt{3^2} \times 3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

بنابراین $\sqrt[3]{3^y} = \sqrt[3]{3^{n+5}}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان هشت برسانیم، به دست می‌آید $3^y = 3^{n+5}$ پس $y = n + 5$ و $n = 2$.

توجه کنید که **۲ ۹۱۲** $\sqrt[3]{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{y^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{y^{\frac{1}{2}}}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt[3]{\sqrt{y} \sqrt{y} \sqrt{y}} = \sqrt[3]{y^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{y^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{y^{\frac{3}{2}}}$$

بنابراین $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y^{\frac{3}{2} + k}}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دوازده برسانیم، به دست می‌آید $y = y^{\frac{3}{2} + k}$ پس $y = 3 + k$ ، یعنی $k = -2$.

توجه به **۱ ۹۱۳** $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1}$ و $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ است. بنابراین

به شکل روبه‌رو درمی‌آید: $\sqrt[2]{4^2 \times 2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt[2]{2^5} = \sqrt[2]{2^5}$

بنابراین $n = 5$ و در نتیجه $\sqrt[2]{n+27} = \sqrt[2]{5+27} = \sqrt[2]{32} = \sqrt[2]{2^5} = 2\sqrt{2}$

توجه کنید که **۱ ۸۹۷** $a = \sqrt[3]{2}$ پس

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}}$$

توجه کنید که **۱ ۸۹۸** $\frac{\Delta^{2^0} + 1 \Delta^{2^0}}{\sqrt{2^0} + 2 \Delta^{2^0}} = \frac{\Delta^{2^0} (1 + 2^0)}{\sqrt{2^0} (1 + 2^0)} = \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\right)^{2^0}$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{\Delta} \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\right)^{2^0}} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\right)^{2^0} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$

با توجه به تعریف ریشه n ام، $a^{m-n} = \Delta$. اکنون عبارت را

$$\frac{a^m - a^n}{a^m + a^n} = \frac{a^n (a^{m-n} - 1)}{a^n (a^{m-n} + 1)} = \frac{a^{m-n} - 1}{a^{m-n} + 1} = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} = \frac{2}{3}$$

توجه کنید که **۲ ۹۰۰** $x = \sqrt[3]{5}$ در نتیجه $x^3 = 5$ و $x^6 = 25$.

بنابراین $x^3 + x^6 = 5 + 25 = 30$.

را حاصل اول توجه کنید که **۱ ۹۰۱** $\sqrt{a} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{2^2}$

بنابراین

$$a\sqrt{a} = \sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

را حاصل دوم توجه کنید که

$$\begin{aligned}a\sqrt{a} &= (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} = (\sqrt{a})^3 = (\sqrt[4]{4})^3 = (\sqrt[4]{2^2})^3 \\ &= (\sqrt[4]{2})^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^6} = 2\end{aligned}$$

را حاصل اول ابتدا توجه کنید که **۳ ۹۰۲**

$$m = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^2 \times 2} = \sqrt[3]{2^6 \times 2} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^7}$$

در نتیجه $m^2 - m\sqrt{2} = 0$ و $m^2 = 2 = m\sqrt{2}$

را حاصل دوم می‌توان نوشت

$$m = \sqrt[3]{4\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \times 4^2} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \times 2^4} = \sqrt[3]{2^{\frac{9}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{9}{2}}}$$

در نتیجه $m^2 - m\sqrt{2} = 0$ و $m^2 = 2 = m\sqrt{2}$

ابتدا توجه کنید که **۲ ۹۰۳**

$$a = \sqrt[3]{2} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^2 \times \frac{4}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^2 \times 2^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{7}{2}}}$$

$$b = \sqrt[3]{2} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{1}{2}}}$$

بنابراین $ab = \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt[3]{2} \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^4} = 2$

توجه کنید که **۱ ۹۰۴** $\sqrt{\frac{a^2}{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^6}}$ و $\sqrt{\frac{b}{a^5}} = \sqrt{\frac{b^7}{a^{10}}}$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^6}} \times \sqrt{\frac{b^7}{a^{10}}} \times \sqrt{a^2 b^7} = \sqrt{\frac{a^2}{b^6} \times \frac{b^7}{a^{10}} \times a^2 b^7} = \sqrt{\frac{a^{10} b^8}{a^{10} b^6}} = 1$$

چون $\sqrt{2-y}$ عددی حقیقی است، پس $2-y \geq 0$. در نتیجه

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $-\sqrt[3]{(2-y)^2} \times \sqrt[3]{(2-y)^0} = -\sqrt[3]{(2-y)^2}$



۱ ۹۲۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2} \times \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{x} = \sqrt{2} \times \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 2^2$$

۳ ۹۲۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^{1/2} = (\sqrt{2}\sqrt{x})^{1/2}$$

$$x^2 = (2x)^2 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 2x \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{x}}{4}$$

۲ ۹۲۵ می‌توان نوشت

$$\sqrt{16^2 a} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{16^2 a} = \sqrt{2^2 \times 2} \Rightarrow \sqrt{16^2 a} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2}$$

$$\sqrt{16^2 a} = 16 \Rightarrow (\sqrt{16^2 a})^2 = 16^2 \Rightarrow 16^2 a = 16^2 \Rightarrow a = 16^2$$

۳ ۹۲۶ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{a+2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2 \times \sqrt{a+2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{a+2} = 2$$

$$a+2 = 2^2 \Rightarrow a = 2$$

۳ ۹۲۷ می‌توان نوشت

$$\sqrt{2} \times \sqrt{x} = \sqrt{2}\sqrt{x} \times \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{x} = \sqrt{2}\sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{x} \Rightarrow 2^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{2^2}{2}$$

۳ ۹۲۸ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم. توجه کنید که

$$5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n} = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{6^n + 15^n + 1}{3 \cdot 10^n}$$

در نتیجه $\frac{1 \cdot 10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}} = \frac{1 \cdot 10^n + 15^n + 6^n}{3 \cdot 10^n} = 3 \cdot 10^n$ بنابراین حاصل

عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{3 \cdot 10^n} = 3 \cdot 10^n$

۴ ۹۲۹ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر

$$\sqrt{x}\sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x}^2 \times x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$$

بنابراین $x = 4$ و در نتیجه $\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{4}\sqrt{4} = \sqrt{4 \times 4} = 2\sqrt{2^2} = 2\sqrt{2^2}$

توجه کنید که

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a^2 \times \frac{1}{a}} = \sqrt{a} = \sqrt{a} = \sqrt{a} = \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

بنابراین $a = 5^4$ اکنون می‌توان نوشت

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} \sqrt{a} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{a^2}} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a^2 \times \frac{1}{a}} = \sqrt{a} = 5$$

ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم

$$n\sqrt[2]{4\sqrt{4}} = n\sqrt[2]{4 \times 2} = n\sqrt[2]{2^{n+2}} = 2$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{\frac{2^{n+2}}{2}} = \sqrt{2^n} = 2$

توجه کنید که

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = \sqrt[3]{1} = 1$$

از طرف دیگر، $3^2 < 1 < 2^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{1} < 2$

۲ ۹۱۴ توجه کنید که

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^{2+2}} = 2$$

در نتیجه $\sqrt{9} = 3 \Rightarrow n = 2$

۲ ۹۱۵ عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^6}, \quad 2\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}, \quad 2\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$$

بنابراین $\sqrt[6]{2^3 \times 2^3 \times 2^3} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{2^{11}}$ پس تساوی داده شده به صورت $\sqrt[6]{2^{11}} = \sqrt[6]{2^{11}}$ است و در نتیجه $a = 11$.

توجه کنید که

$$\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{3^2}$$

از طرف دیگر $\sqrt[3]{18} = b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b^3 a}$ بنابراین $\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^2}$

۱ ۹۱۷ عبارت‌ها را با فرجه ۲۰ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = -\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} = -\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$$

بنابراین

$$A = -\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \times \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} \times \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$$

$$= -\sqrt{(2-\sqrt{2})^6} = -(2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-2$$

۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a^2} \times \sqrt{ra} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{ra} = \sqrt{ra^2} = \sqrt{ra} = \sqrt{r(1-\sqrt{2})}$$

بنابراین $a-b = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1$ در نتیجه $b = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}$

توجه کنید که

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^2} = \sqrt[3]{2 \times \sqrt{2}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین $a^{12} = 3$ یعنی a^{12} عددی صحیح است. توجه کنید که بقیه گزینها عددی صحیح نیستند.

۴ ۹۲۰ توجه کنید که $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2 a} = \sqrt{a^3} = \sqrt{a}$ بنابراین

عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$$

۱ ابتدا عبارت‌ها را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{\sqrt{a^2} \times a} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt{a^3}$$

$$\sqrt{a^6 \sqrt{a^{-2}}} = \sqrt{a^6 \times a^{-1}} = \sqrt{a^5}$$

بنابراین عبارت‌های مورد نظر برابرند.

توجه کنید که

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\sqrt{a^2} \times \frac{1}{a}} = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$$

بنابراین $\sqrt[3]{a} = 3$ پس $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = 3 \times 3 = 9$

در نتیجه $a = 3^3 = 27$



۹۴۱ باید سه عدد $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{2}$ را مقایسه کنیم. چون این عددها مثبت‌اند، می‌توانیم توان ششم آن‌ها را مقایسه کنیم (توجه کنید که توان ششم هر یک از این عددها، عددی صحیح است و مقایسه عددهای صحیح ساده است):

$$(\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125, \quad (\sqrt{11})^6 = 11^3 = 1331$$

$$(2\sqrt{2})^6 = 2^6 \times 2^3 = 2^9 = 512$$

بنابراین $(2\sqrt{2})^6 > (\sqrt{5})^6 > (\sqrt{11})^6$ و در نتیجه $2\sqrt{2} > \sqrt{5} > \sqrt{11}$.

۹۴۲ ابتدا اعداد را با یک‌دیگر رادیکال با فرجه مشترک می‌نویسیم:

$$\sqrt[12]{(12)^2 (54)^2 \times 2^2 \times 6} = \sqrt[12]{2^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 3}$$

$$= \sqrt[12]{2^{12} \times 3^{12}} = 6$$

۹۴۳ توجه کنید که $\frac{64}{100} = \left(\frac{4}{10}\right)^2$ در نتیجه

$$(-/64)^{-1/5} = \left(\left(\frac{4}{10}\right)^2\right)^{-1/5} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-2/5}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{(-/64)^{-1/5}}{(-/2)^{-1/5}} = \frac{(-/4)^{-2/5}}{(-/2)^{-1/5}} = \left(\frac{4}{2}\right)^{-2/5} = 2^{-2/5} = 2^{-1/5} = \sqrt[5]{2}$$

۹۴۴ توجه کنید که

$$(-/0.4)^{1/2} = \left(\frac{4}{100}\right)^{1/2} = \left(\left(\frac{2}{10}\right)^2\right)^{1/2} = 2/10 = 1/5, \quad (-/625)^{-1/4} = (5^4)^{-1/4} = 5^{-1} = 1/5$$

$$(-/0.008)^{-1/3} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-1/3} = \left(\left(\frac{2}{10}\right)^3\right)^{-1/3} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{2} = 5$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1/5 \times 1/5}{5} = \frac{1}{125}$.

۹۴۵ توجه کنید که

$$-/25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, \quad -/0.00032 = \frac{32}{100000} = \frac{2^5}{10^5} = \frac{1}{5^5}$$

$$\frac{(-/0.00032)^{1/5}}{(-/25)^{1/5}} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{1/5}} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{1/5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

۹۴۶ توجه کنید که

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{5/6} = \left(\frac{1}{2^6}\right)^{5/6} = (2^{-6})^{5/6} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{5/6} = \left(\frac{1}{2^5}\right)^{5/6} = (2^{-5})^{5/6} = 2^{-25/6} = \frac{1}{16}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{512}$.

۹۴۷ توجه کنید که

$$32^{-1/5} = (2^5)^{-1/5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 27^{-1/3} = (3^3)^{-1/3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$125^{-1/3} = (5^3)^{-1/3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} = \frac{10}{180} + \frac{20}{180} + \frac{36}{180} = \frac{66}{180} = \frac{11}{30}$.

۹۳۳ توجه کنید که

$$-4 < -\sqrt[3]{n} < -3 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{n} < 4 \Rightarrow 27 < n < 64 \Rightarrow 27 < n < 64$$

چون n عددی طبیعی است، پس $28 \leq n \leq 63$. بنابراین تعداد عددهای طبیعی مورد نظر برابر است با $63 - 28 + 1 = 36$.

۹۳۴ چون $0 < a < 1$ ، پس

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt[4]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[4]{a} < 0 \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} - \sqrt{a}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{a} - \sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

۹۳۵ توجه کنید که $1/0.1 > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{1/0.1} > 1 \Rightarrow a > 1$

بنابراین $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$ در نتیجه، از بقیه بزرگ‌تر است.

۹۳۶ تمام اعداد را به صورت ریشه ۱۲ام می‌نویسیم و مقایسه می‌کنیم:

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{729}, \quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

$$\sqrt[4]{20} = \sqrt[12]{20^3} = \sqrt[12]{8000}, \quad \sqrt[5]{30} = \sqrt[12]{30^2} = \sqrt[12]{900}$$

واضح است که $\sqrt[12]{8000}$ عدد بزرگ‌تری است.

۹۳۷ ابتدا a ، b و c را به صورت ریشه ۳۰ام بازنویسی می‌کنیم:

$$a = \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^15} = (\sqrt[30]{2})^{15}, \quad b = \sqrt[3]{9} = \sqrt[30]{9^{10}} = \sqrt[30]{3^{20}} = (\sqrt[30]{3})^{20}$$

$$c = \sqrt[5]{27} = \sqrt[30]{27^6} = \sqrt[30]{3^{18}} = (\sqrt[30]{3})^{18}$$

چون $\sqrt[30]{3} > 1$ ، پس $(\sqrt[30]{3})^{20} > (\sqrt[30]{3})^{18} > (\sqrt[30]{3})^{15}$ ، یعنی $a < c < b$.

۹۳۸ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$. بنابراین کافی

است عددهای $\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[5]{2}$ و $\sqrt[7]{2}$ را مقایسه کنیم. توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5}, \quad \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3}, \quad \sqrt[7]{2} = \sqrt[15]{2^2}$$

اکنون توجه کنید که

$$2^5 = (2^2)^2 \cdot 2 = 8^2 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$$

$$8^5 < 9^5 \Rightarrow 2^5 < 3^5 \Rightarrow \sqrt[15]{2^5} < \sqrt[15]{3^5} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$$

از طرف دیگر، $5^6 = (5^2)^3 = 25^3 = 15625$ ، $3^{10} = (3^5)^2 = 243^2 = 59049$.

$$125^2 < 243^2 \Rightarrow 5^6 < 3^{10} \Rightarrow \sqrt[15]{5^6} < \sqrt[15]{3^{10}} \Rightarrow \sqrt[5]{2} < \sqrt[7]{2}$$

بنابراین $\sqrt[3]{2}$ در بین گزینه‌ها بزرگ‌ترین عدد است.

۹۳۹ توجه کنید که $a = -\sqrt[3]{4}$ ، $b = -\sqrt[3]{2}$ ، $c = -\sqrt[3]{1}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{1} \Rightarrow -\sqrt[3]{4} < -\sqrt[3]{2} < -\sqrt[3]{1}$$

در نتیجه $a < b < c$.

۹۴۰ چون هر سه عدد مثبت هستند، می‌توانیم توان ششم آن‌ها را

مقایسه کنیم:

$$a = \sqrt{6} \Rightarrow a^6 = (\sqrt{6})^6 = 6^3 = 216$$

$$b = \sqrt[3]{15} \Rightarrow b^6 = (\sqrt[3]{15})^6 = 15^2 = 225$$

$$c = \sqrt[5]{22} \Rightarrow c^6 = (\sqrt[5]{22})^6 = 22$$

چون $a^6 < b^6 < c^6$ ، پس $a < b < c$.